

احتمال مهندسی

فصل اول: اصول شمارش

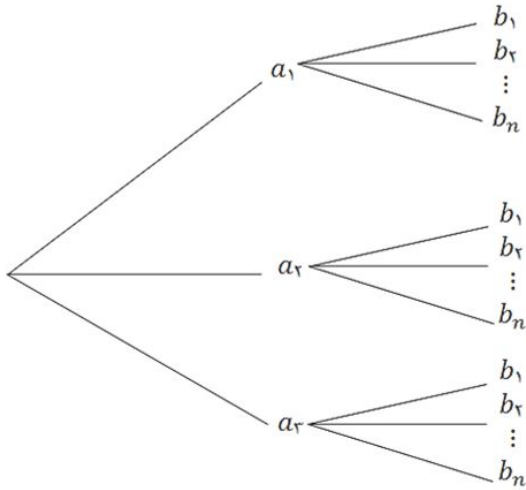
سید مهدی سجادیه



اصل شمارش

- اصل و:

– اگر دو عمل که اولی به m حالت و دومی به n حالت قابل انجام باشند را بخواهیم با هم انجام دهیم این عمل به $m \times n$ حالت قابل انجام است.



- **مثال:** جامعه ای شامل ۱۰ خانواده است که هر خانواده دو فرزند دارد.

- الف) اگر بخواهیم از این جامعه یک مادر و یکی از فرزندان را انتخاب کنیم چند حالت وجود دارد؟ $20 = 2 \times 10$

- ب) اگر بخواهیم از این جامعه یک مادر و یک کودک انتخاب کنیم چند حالت وجود دارد؟

- $200 = 20 \times 10$

اصل جمع

- اصل یا:

– اگر عملی را بتوانیم به دو روش اجرا کنیم به طوریکه که روش اولی به m حالت و روش دوم به n حالت قابل انجام باشند این عمل به $m+n$ حالت قابل انجام است.

- **مثال:** فرض کنید می خواهید یک ماشین تهیه کنید. در صورتیکه دو نمایشگاه وجود داشته باشد و در نمایشگاه اول ۴ ماشین و در نمایشگاه دوم ۳ ماشین وجود داشته باشد

- الف) به چند طریق از این دو نمایشگاه می توانید یک ماشین تهیه کنید؟

$$7 = 4 + 3$$

- ب) اگر بخواهیم از نمایشگاه اول یک ماشین و از نمایشگاه دوم نیز یک ماشین تهیه کنیم چند حالت وجود دارد؟

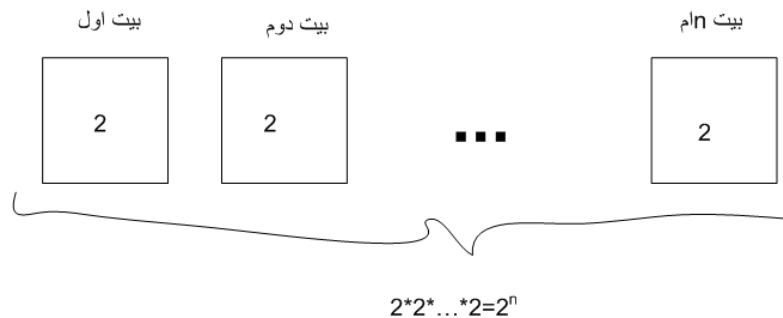
$$12 = 4 * 3$$

تعمیم اصل شمارش

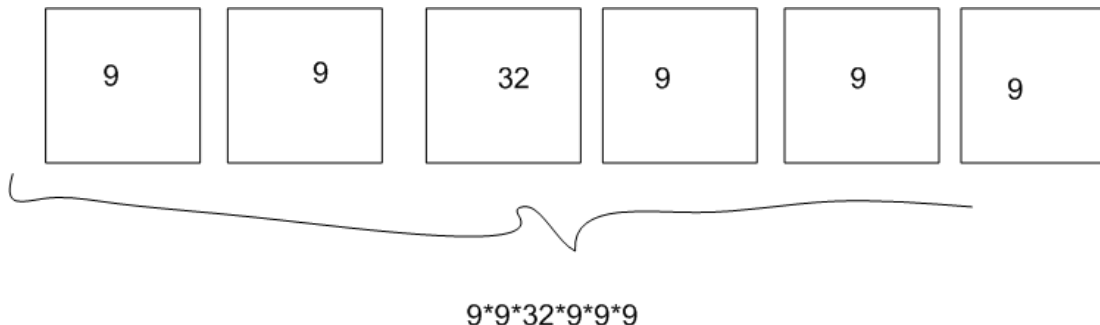
- تعمیم اصل و:

– اگر k عمل که اولی به m_1 حالت، دومی به m_2 حالت، ... و k امی به m_k حالت قابل انجام باشند را بخواهیم با هم انجام دهیم این عمل به $m_1 * m_2 * \dots * m_k$ حالت قابل انجام است.

- مثال:** چند عدد n رقمی می توان نوشت که ارقام آن فقط صفر یا یک باشد (اگر سمت راست یک n بیتی صفر باشد آن صفرها حذف نمی شود)؟



- مثال:** چند پلاک اتومبیل با یک حرف الفبا و ۵ رقم با ارقام غیر صفر می توان نوشت؟



جایگشت

- اگر r عضو وجود داشته باشد (عضو مجزا) و ترتیب قرار گرفتن آنه برای ما مهم باشد گوییم جایگشت r تایی داریم.
 - تعداد جایگشت‌های r تایی برابر است با:
- $$r! = r * (r-1) * (r-2) * \dots * 2 * 1$$

- **مثال:** فرض کنید در یک کلاس ۶ دانشجوی پسر و ۴ دانشجوی دختر حضور دارند. پس از برگزاری امتحان نمرات آنه به چند صورت قابل نمایش است اگر
- الف) محدودیتی در لیست نباشد؟

10!

- ب) لیست دخترها و پسرها جدا باشد؟

6! * 4!

ترتیب

- فرض کنید n عضو داریم و می خواهیم k تا از آنها را انتخاب کنیم ($k \leq n$) به طوریکه ترتیب اعضا برای ما مهم باشد. به چند طریق اینکار قابل انجام است؟

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots (n - k + 1) = n! / (n - k)!$$

- **مثال:** فرض کنید چهار عضو a, b, c, d وجود دارند. چند ترتیب برای انتخاب دو عضو از این مجموعه وجود دارد.

ab ac ad ba bc bd
ca cb cd da db dc

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

جایگشت با ویژگی های خاص

- اگر یک مجموعه n تایی داشته باشیم که k_1 عضو آن یک شکل، k_2 عضو آن شکل دیگر و ... k_r تای آن شکل مجزا از $r-1$ شکل قبل باشند در این صورت تعداد جایگشتها برابر است با:

$$n!$$

$$(k_1!)(k_2!)\dots(k_r!)$$

- **مثال:** با حروف کلمه PERRER چند کلمه دیگر شش حرفی می توان ساخت؟

$$\frac{6!}{(3!)(2!)(1!)} = 60$$

- **مثال:** با حروف کلمه مامان چند کلمه ۵ حرفی غیر تکراری می توان ساخت؟

$$\frac{5!}{(2!)(2!)(1!)} = 15$$

ترکیب

- اگر در انتخاب r شی از n شی، ترتیب اشیا مهم نباشد گوئیم ترکیب رخ داده است:

$$\frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

ترکیب

- اگر در انتخاب r شی از n شی، ترتیب اشیا مهم نباشد گوئیم ترکیب رخ داده است:

$$\frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

- چندویژگی مهم

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$$

$$\binom{n}{r} = 0, r > n$$

مثال

- ۷ مرد و ۵ زن کاندید شورای شهر در یک شهر هستند و این شهر نیاز به عضو دارد.

- الف) به چند طریق می توان از بین این کاندیداها ۵ عضو انتخاب کرد.

- ب) اگر بخواهیم از بین اعضا ۳ نفر زن و دو نفر مرد باشند به چند طریق این کار قابل انجام است؟

-

مثال

- ۷ مرد و ۵ زن کاندید شورای شهر در یک شهر هستند و این شهر نیاز به عضو دارد.

- الف) به چند طریق می توان از بین این کاندیداها ۵ عضو انتخاب کرد.

$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{(7)!5!} = \frac{12*11*10*9*8}{5*4*3*2*1}$$

- ب) اگر بخواهیم از بین اعضا ۳ نفر زن و دو نفر مرد باشند به چند طریق این کار قابل انجام است؟

-

مثال

- ۷ مرد و ۵ زن کاندید شورای شهر در یک شهر هستند و این شهر نیاز به عضو دارد.

- (الف) به چند طریق می توان از بین این کاندیداها ۵ عضو انتخاب کرد.

$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{(7)!5!} = \frac{12*11*10*9*8}{5*4*3*2*1}$$

- (ب) اگر بخواهیم از بین اعضا ۳ نفر زن و دو نفر مرد باشند به چند طریق این کار قابل انجام است؟

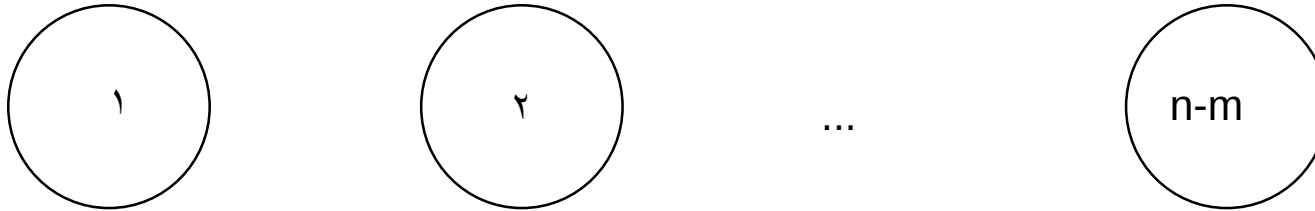
$$\binom{5}{3} * \binom{7}{2} = \frac{5!}{(3)!2!} * \frac{7!}{(5)!2!} = 10 * 21 = 210$$

مثال

- فرض کنید مجموعه ای از n آنتن وجود دارد که m تای آنها معیوب و بقیه سالم هستند و آنتن سالم و معیوب از لحاظ ظاهری قابل شناسایی نیستند. چند حالت وجود دارد که در چیدمان n آنتن هیچ دو آنتن معیوب پشت سرهم قرار نگیرند؟ **دقت کنید آنتن ها از هم قابل تشخیص نیستند**
- حل:

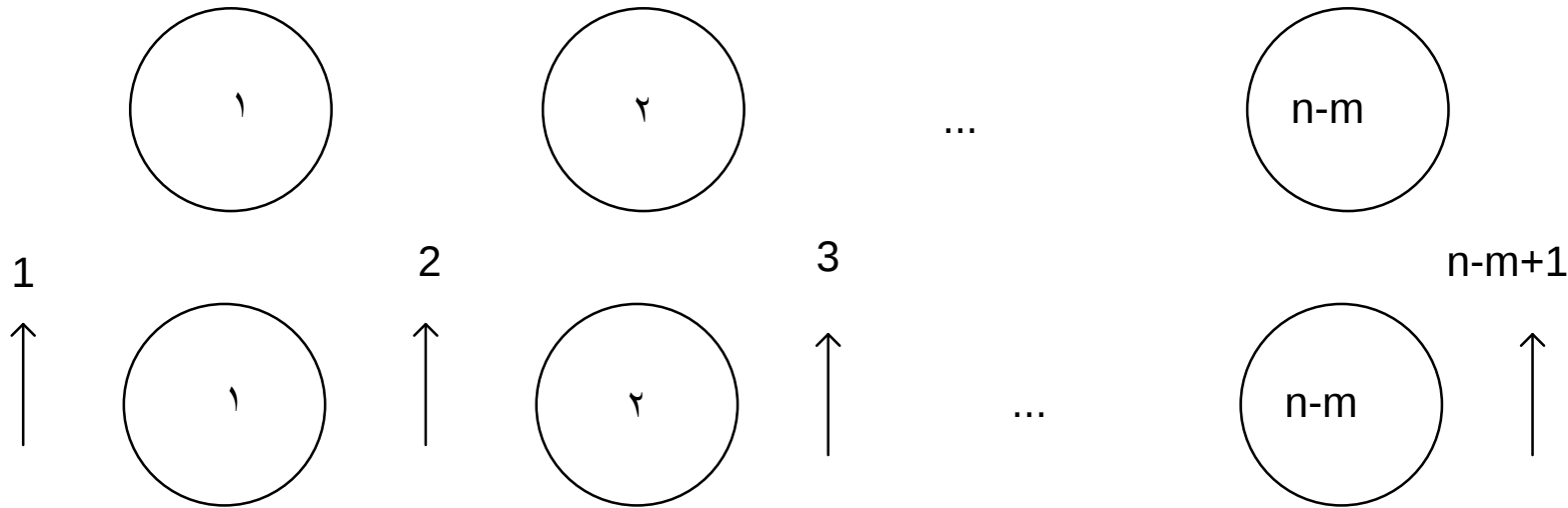
مثال

- فرض کنید مجموعه ای از n آنتن وجود دارد که m تای آنها معیوب و بقیه سالم هستند و آنتن سالم و معیوب از لحاظ ظاهری قابل شناسایی نیستند. چند حالت وجود دارد که در چیدمان n آنتن هیچ دو آنتن معیوب پشت سرهم قرار نگیرند؟ دقت کنید آنتن ها از هم قابل تشخیص نیستند
- حل: آنتن های سالم را در نظر بگیرید



مثال

- فرض کنید مجموعه ای از n آنتن وجود دارد که m تای آنها معیوب و بقیه سالم هستند و آنتن سالم و معیوب از لحاظ ظاهری قابل شناسایی نیستند. چند حالت وجود دارد که در چیدمان n آنتن هیچ دو آنتن معیوب پشت سرهم قرار نگیرند؟ دقت کنید آنتن ها از هم قابل تشخیص نیستند
- حل: آنتن های سالم را در نظر بگیرید



- آنتهای معیوب میتوانند فقط در نقاط مشخص شده قرار گیرند
تا هیچ دو آنتن معیوب پشت سر هم نباشند

$$\binom{n-m+1}{m}$$

مثال

- فرض کنید مجموعه ای از 5 آنتن وجود دارد که 2 تای آنها معیوب و بقیه سالم هستند و آنتن سالم و معیوب از لحاظ ظاهری قابل شناسایی نیستند. چند حالت وجود دارد که در چیدمان 5 آنتن هیچ دو آنتن معیوب پشت سرهم قرار نگیرند؟

• حل

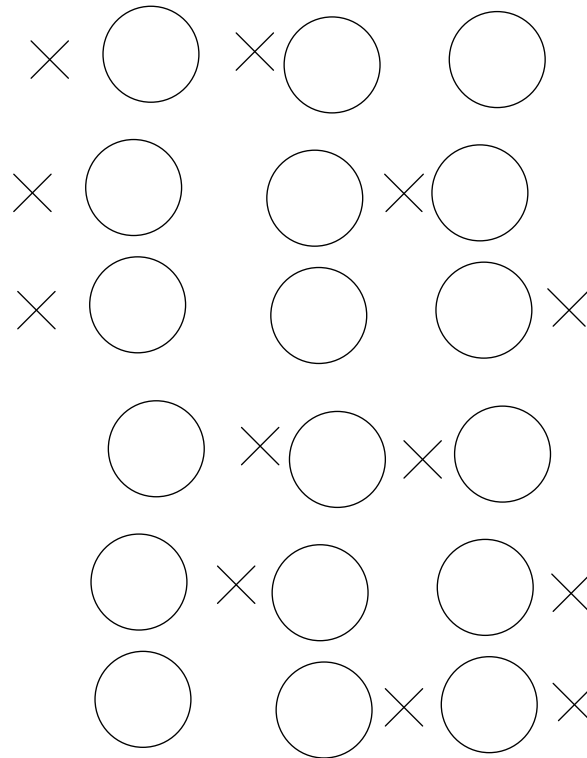
$$\binom{5-2+1}{2} = 6$$

مثال

- فرض کنید مجموعه ای از 5 آنتن وجود دارد که 2 تای آنها معیوب و بقیه سالم هستند و آنتن سالم و معیوب از لحاظ ظاهری قابل شناسایی نیستند. چند حالت وجود دارد که در چیدمان 5 آنتن هیچ دو آنتن معیوب پشت سرهم قرار نگیرند؟

• حل

$$\binom{5-2+1}{2} = 6$$



$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

رابطه مهم در ترکیبیات

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

- اثبات: با استفاده از یک عنصر (تبدیل n عنصر به دو مجموعه یک عضو و $n-1$ عضو)

- دو حالت
- حضور یک عضو مورد نظر در r تایی انتخاب شده

- عدم حضور یک عضو مورد نظر در r تایی انتخاب شده

قضیه دو جمله ای

$$\begin{aligned}(x + y)^3 &= (x + y)(x + y)(x + y) = \\ x^3 + x^2y + xyx + xy^2 + yxx + yxy + yyx + yyy &= \\ x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\end{aligned}$$

قضیه دو جمله ای

$$(x + y)^n = \underbrace{(x + y)(x + y) \dots (x + y)}_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

- اثبات:
 - توان i متغیر x باید از n پرانتز ، i تای آن انتخاب شود
- $$\binom{n}{i}$$

تقسیم n نفر به r گروه مجزا

- فرض کنید n نفر را بخواهیم بین r گروه تقسیم کنیم به طوریکه اعضای هر گروه به ترتیب گروه‌های $n_1, n_2, \dots, n_r$ باشد در این صورت تعداد حالات برابر است با:

$$\begin{aligned} & \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \dots \binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{r-1}}{n_r} = \\ & \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \dots \frac{(n-n_1-n_2-\dots-n_{r-1})!}{n_r!(n-n_1-n_2-\dots-n_{r-1}-n_r)!} = \\ & \frac{n!}{n_1!(n_2)! \dots n_r!} \end{aligned}$$

مثال

- فرض کنید ۱۰ پلیس در یک کلانتری استخدام شده اند. اگر ۳ نفر در قسمت اداری، ۵ نفر در قسمت گشت و ۲ نفر در قسمت ورودی کار کنند به چند طریق این کار قابل انجام است؟

مثال

- فرض کنید ۱۰ پلیس در یک کلانتری استخدام شده اند. اگر ۳ نفر در قسمت اداری، ۵ نفر در قسمت گشت و ۲ نفر در قسمت ورودی کار کنند به چند طریق این کار قابل انجام است؟

$$\binom{n}{n_1, n_2, n_3} = \binom{10}{2, 5, 3} = \frac{10!}{2! 5! 3!}$$

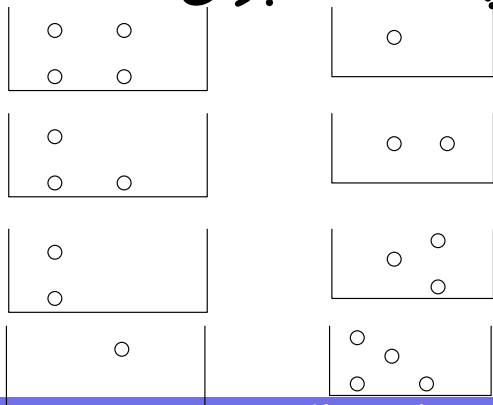
تعداد جوابهای مثبت صحیح معادلات

- اگر بخواهیم n توپ مختلف را در r ظرف مجزا قرار دهیم به چند طریق اینکار قابل انجام است؟

$$\underbrace{n * n * \dots * n}_r = n^r$$

- حال اگر این توپها مانند هم باشد و در هر ظرف باید حداقل یک توپ باشد چه اتفاقی می افتد؟

- مثال : فرض کنید دو ظرف مجزاداریم و ۵ توپ مثل هم. چند حالت برای تقسیم توپها بین دو ظرف وجود دارد؟



تعداد جوابهای مثبت صحیح معادلات

- برای آنکه تعداد حالات ممکن برای تقسیم n توپ یکسان بین r ظرف تقسیم کنیم به شرط آنکه حداقل در هر ظرف یک توپ باشد باید $r-1$ جدا کننده بین $n-1$ مکان بین توپها قرار دهیم و بنابراین تعداد حالات برابر است با:

$$\binom{n-1}{r-1}$$

- این مساله معادل آن است تعداد جوابهای مثبت معادله زیر محاسبه شود:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n, \quad x_i \geq 1$$

تعداد جوابهای مثبت صحیح معادلات

- مثال: اگر شخصی دارای ۲۰ دلار است و می خواهد در چهار زمینه سرمایه گذاری کند. به چند روش می تواند در این چهار زمینه سرمایه گذاری کند به طوریکه در هر زمینه حداقل یک دلار سرمایه گذاری کرده باشد؟
- حل: x_i میزان سرمایه گذاری در زمینه i ام

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \quad x_i \geq 1$$

$$\Rightarrow \binom{20-1}{4-1} = \frac{19*18*17}{6} = 969$$

- اگر بخواهد علاوه بر سرمایه گذاری مقداری پول (حداقل یک دلار) نزد خود نگه دارد به چند حالت این کار امکان پذیر است؟

- حل: y میزان پول ذخیره شده $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y = 20 \quad x_i \geq 1, y \geq 1$

$$\Rightarrow \binom{20-1}{5-1} = \frac{19*18*17*16}{24} = 3876$$

تعداد جوابهای صحیح معادلات

- مثال: اگر شخصی دارای ۲۰ دلار است و می خواهد در چهار زمینه سرمایه گذاری کند. به چند روش می تواند در این چهار زمینه سرمایه گذاری کند به طوریکه در هر زمینه حداقل یک دلار سرمایه گذاری کرده باشد؟
- حل: x_i میزان سرمایه گذاری در زمینه i ام

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \quad x_i \geq 1$$

$$\Rightarrow \binom{20-1}{4-1} = \frac{19*18*17}{6} = 969$$

- اگر بخواهد علاوه بر سرمایه گذاری مقداری پول (حداقل یک دلار) نزد خود نگه دارد به چند حالت این کار امکان پذیر است؟

- حل: y میزان پول ذخیره شده $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y = 20 \quad x_i \geq 1, y \geq 1$

$$\Rightarrow \binom{20-1}{5-1} = \frac{19*18*17*16}{24} = 3876$$

تعداد جوابهای نامنفی صحیح معادلات

- اگر شرط $x_i \geq 0$ باشد حل به چه صورتی است؟

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n \quad x_i \geq 0$$

- با تغییر متغیر داریم

$$y_i = x_i + 1 \Rightarrow y_i \geq 1, x_i = y_i - 1$$

- و در نتیجه:

$$(y_1 - 1) + (y_2 - 1) + \dots + (y_r - 1) = n \quad y_i \geq 1$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_r - r = n \quad y_i \geq 1$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_r = n + r \quad y_i \geq 1$$

- تعداد جوابهای نامنفی

$$\binom{n+r-1}{r-1}$$

مثال

- مثال: اگر شخصی دارای ۲۰ دلار است و می خواهد در چهار زمینه سرمایه گذاری کند. به چند روش می تواند در این چهار زمینه سرمایه گذاری کند به طوریکه می تواند در برخی زمینه ها سرمایه گذاری نکند؟

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \quad x_i \geq 0$$

$$\Rightarrow \binom{20+4-1}{4-1} = \frac{23*22*21}{6} = 1771$$

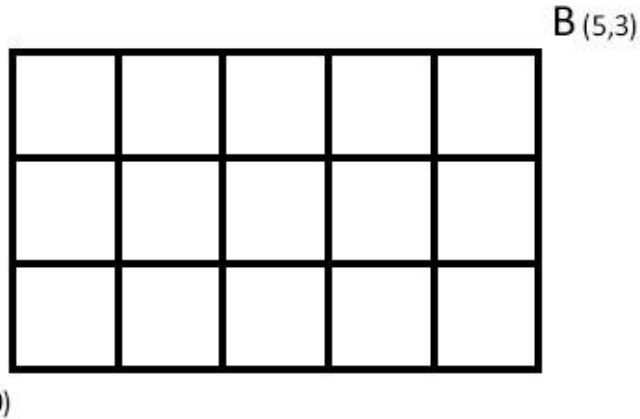
- مثال به چند طریق می توان ۱۰ تخته سیاه را بین ۴ مدرسه تقسیم کرد به طوریکه به هر مدرسه حداقل یک تخته سیاه برسد؟

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \quad x_i \geq 1$$

$$\Rightarrow \binom{10-1}{4-1} = \binom{9}{3}$$

مثال

- مجموعه ای از نقاط را در نظر بگیرید که A می تواند تنها به سمت بالا و سمت راست حرکت کند. چند مسیر وجود دارد که A بتواند به B برسد؟



- راه حل اول: به چند روش می توان با $RRRRRHHH$ کلمات مختلف به دست آورد

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \quad x_i \geq 0$$

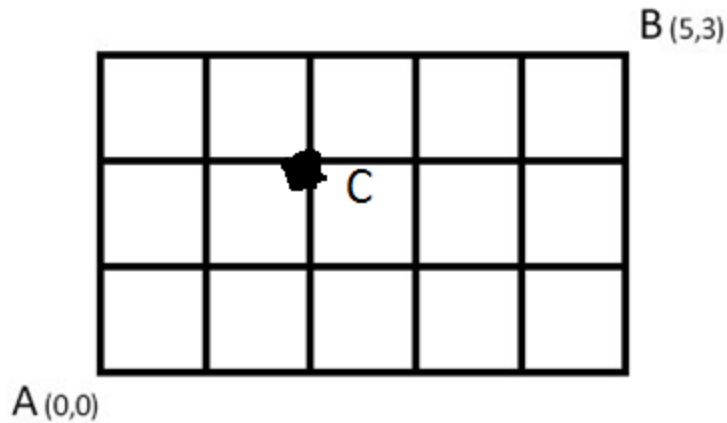
$$\Rightarrow \binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3}$$

- راه حل دوم: $x_1 H x_2 H x_3 H x_4$

- راه حل سوم $y_1 R y_2 R y_3 R y_4 R y_5 R y_6$

مثال

- مجموعه ای از نقاط را در نظر بگیرید که A می تواند تنها به سمت بالا و سمت راست حرکت کند. چند مسیر وجود دارد که A بتواند به B برسد و از C بگذرد؟



- حل:
- چند مسیر از A به C وجود دارد؟
- چند مسیر از C به B وجود دارد؟

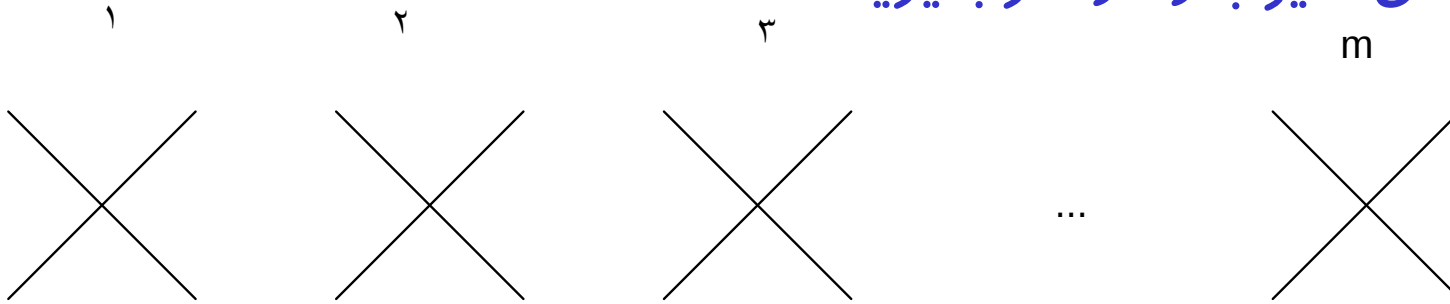
$$\binom{4}{2} \binom{4}{3} = 24$$

مثال

- فرض کنید مجموعه ای از n آنتن وجود دارد که m تای آنها معیوب و بقیه سالم هستند و آنتن سالم و معیوب از لحاظ ظاهری قابل شناسایی نیستند. چند حالت وجود دارد که در چیدمان n آنتن هیچ دو آنتن معیوب پشت سرهم قرار نگیرند؟ **دقت کنید آنتن ها از هم قابل تشخیص نیستند**

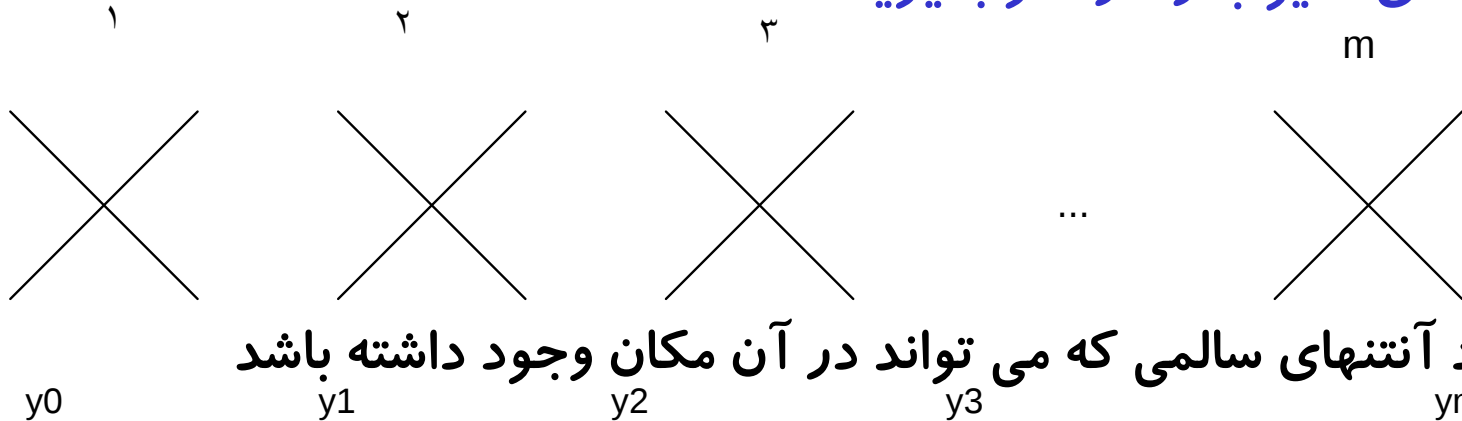
مثال

- فرض کنید مجموعه ای از n آنتن وجود دارد که m تای آنها معیوب و بقیه سالم هستند و آنتن سالم و معیوب از لحاظ ظاهری قابل شناسایی نیستند. چند حالت وجود دارد که در چیدمان n آنتن هیچ دو آنتن معیوب پشت سرهم قرار نگیرند؟ **دقت کنید آنتن ها از هم قابل تشخیص نیستند**
- حل: آنتن های معیوب را در نظر بگیرید**

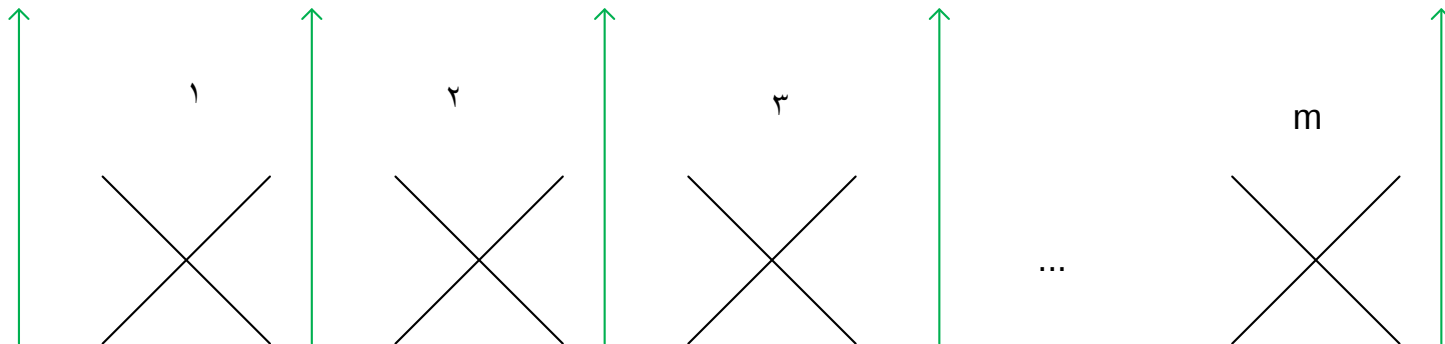


مثال

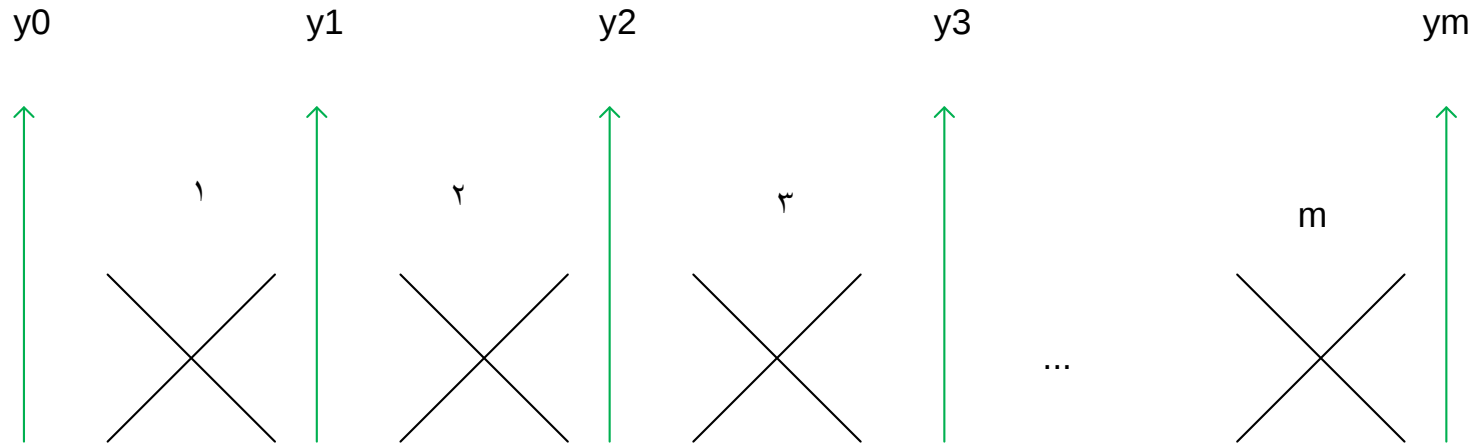
- فرض کنید مجموعه ای از n آنتن وجود دارد که m تای آنها معیوب و بقیه سالم هستند و آنتن سالم و معیوب از لحاظ ظاهری قابل شناسایی نیستند. چند حالت وجود دارد که در چیدمان n آنتن هیچ دو آنتن معیوب پشت سرهم قرار نگیرند؟ **دقت کنید آنتن ها از هم قابل تشخیص نیستند**
- حل: آنتن های معیوب را در نظر بگیرید**



- y_i : تعداد آنتنهای سالمی که می تواند در آن مکان وجود داشته باشد**



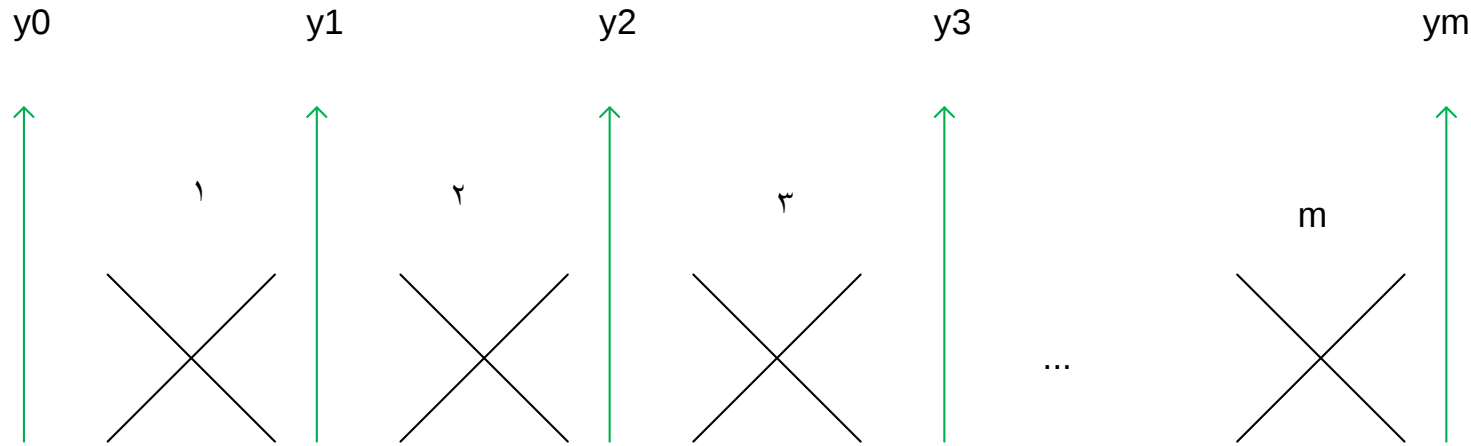
ادامہ حل



$$y_0 + y_1 + \dots + y_m = n - m$$

$$y_0 \geq 0, y_1 \geq 1, y_2 \geq 1, \dots, y_{m-1} \geq 1, y_m \geq 0$$

ادامه حل



$$y_0 + y_1 + \dots + y_m = n - m$$

$$y_0 \geq 0, y_1 \geq 1, y_2 \geq 1, \dots, y_{m-1} \geq 1, y_m \geq 0$$

$$z_0 = y_0 + 1 \geq 1, z_m = y_m + 1 \geq 0_1$$

• با تغییر متغیر داریم

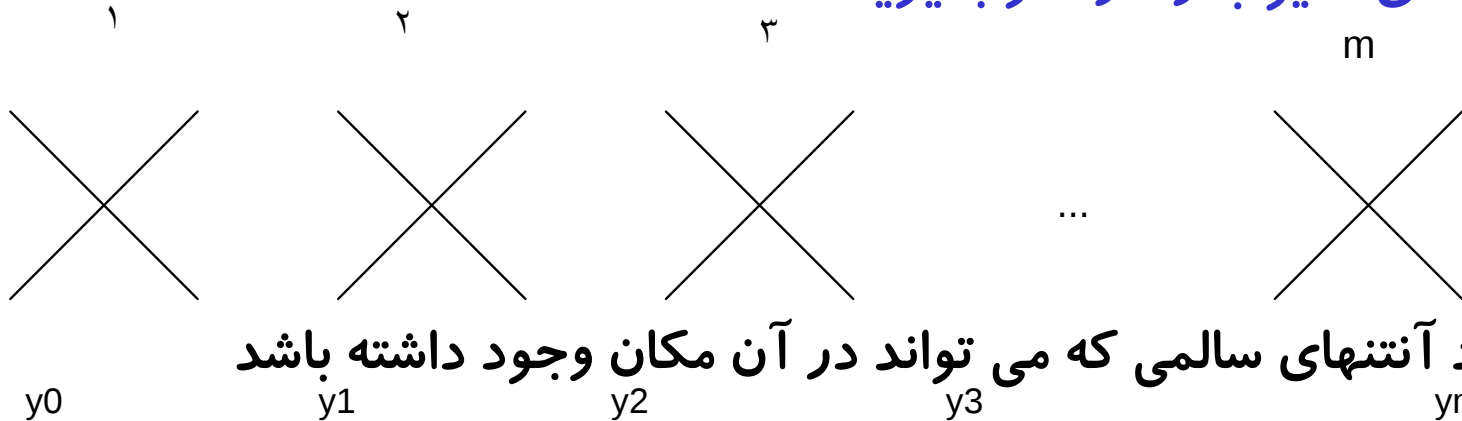
$$(z_0 - 1) + y_1 + \dots + y_{m-1} + (z_m - 1) = n - m$$

$$(z_0 - 1) + y_1 + \dots + y_{m-1} + (z_m - 1) = n - m$$

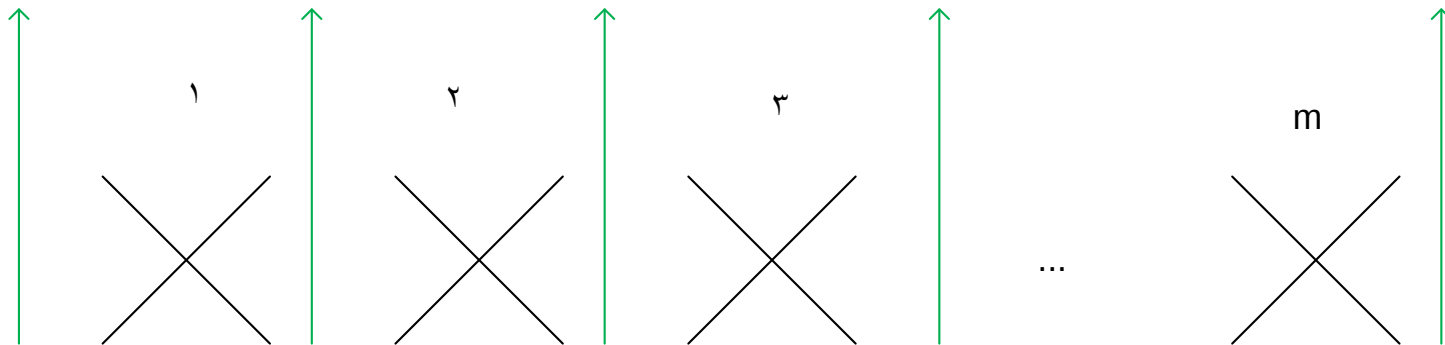
$$\binom{n - m + 2 - 1}{m + 1 - 1} = \binom{n - m + 1}{m}$$

مثال

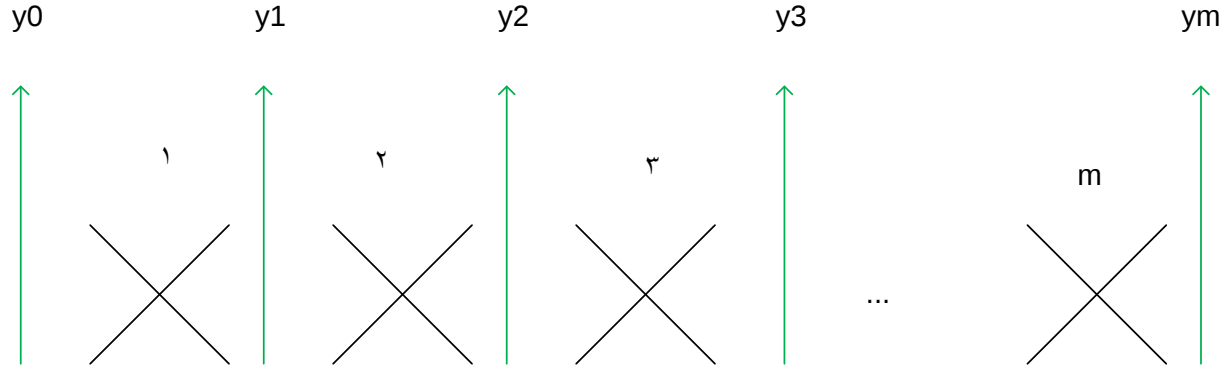
- فرض کنید مجموعه ای از n آنتن وجود دارد که m تای آنها معیوب و بقیه سالم هستند و آنتن سالم و معیوب از لحاظ ظاهری قابل شناسایی نیستند. چند حالت وجود دارد که در چیدمان n آنتن بین هر دو آنتن معیوب حداقل دو آنتن سالم قرار گیرد؟ **دقت کنید آنتن ها از هم قابل تشخیص نیستند**
- حل: آنتن های معیوب را در نظر بگیرید**



- y_i : تعداد آنتنهای سالمی که می تواند در آن مکان وجود داشته باشد



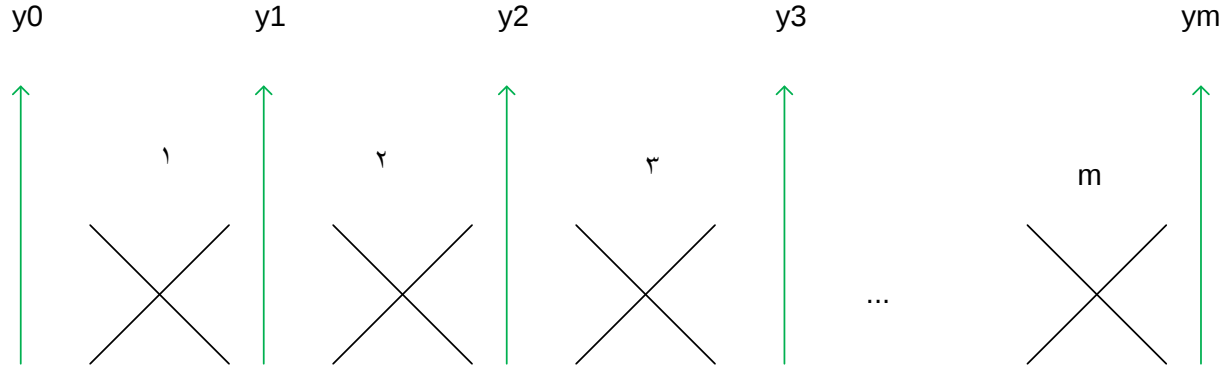
ادامه حل



$$y_0 + y_1 + \dots + y_m = n - m$$

$$y_0 \geq 0, y_1 \geq 2, y_2 \geq 2, \dots, y_{m-1} \geq 2, y_m \geq 0$$

ادامه حل



$$y_0 + y_1 + \dots + y_m = n - m$$

$$y_0 \geq 0, y_1 \geq 2, y_2 \geq 2, \dots, y_{m-1} \geq 2, y_m \geq 0$$

• با تغییر متغیر داریم

$$w_1 = y_1 - 2 \geq 0, w_2 = y_2 - 2 \geq 0, \dots, w_{m-1} = y_{m-1} - 2 \geq 0$$

$$y_0 + (w_1 - 2) + \dots + (w_{m-1} - 2) + y_m = n - m$$

$$y_0 + w_1 + \dots + w_{m-1} + y_m = n - m - 2(m - 1)$$

$$\binom{n - 3m + 2 + (m + 1) - 1}{m + 1 - 1} = \binom{n - 2m + 2}{m}$$

فهرست مطالب فصل دوم: مبانی احتمال

- آزمایش تصادفی
- قوانین مجموعه‌ها
- اصول و قضایای احتمال
- فضای نمونه با نتایج هم شانس
- مثال‌های مربوط

آزمایش تصادفی

- آزمایش تصادفی :
آزمایشی که نتیجه آن از قبل به طور قطعی معلوم نباشد
مانند پرتاب سکه، پرتاب تاس، پیش بینی نتیجه فوتبال
- فضای نمونه:
- تمام حالت‌های ممکن برای یک آزمایش تصادفی (قرارداد با S نشان می‌دهیم)

آزمایش تصادفی

- آزمایش تصادفی :
آزمایشی که نتیجه آن از قبل به طور قطعی معلوم نباشد
مانند پرتاب سکه، پرتاب تاس، پیش بینی نتیجه فوتبال
- فضای نمونه:
- تمام حالت‌های ممکن برای یک آزمایش تصادفی (قرارداد با S نشان می‌دهیم)
- مثال: در پرتاب سکه $\{H, T\}$ و در پرتاب تاس $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- پیشامد: هر زیر مجموعه از فضای نمونه (قرارداد: نشان دادن پیشامد با حروف بزرگ)
- پیشامد ساده: پیشامد دارای یک عضو
- پیشامد مرکب: پیشامد دارای بیش از یک عضو

آزمایش تصادفی

● مثال: در پرتاب تاس

● E: وقوع عدد ۲: پیشامد ساده

● F: وقوع عدد بزرگتر از ۴: پیشامد مرکب

نکته

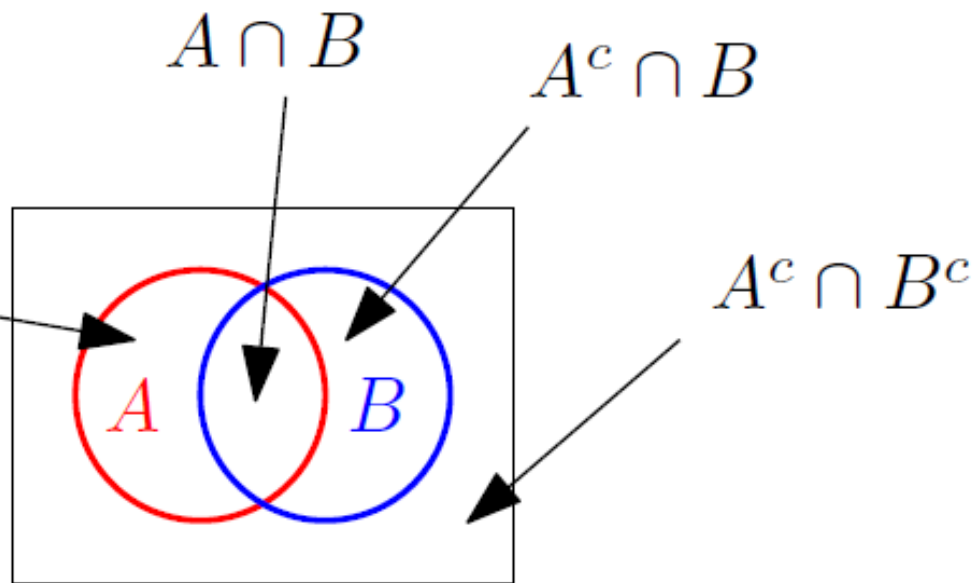
● اگر نتیجه‌ای از یک پیشامد E رخ دهد گوییم آن پیشامد رخ داده است.

● بنابراین همیشه فضای نمونه S رخ داده است.

● قوانین مجموعه‌ها برای پیشامدها برقرار است

قوانین مجموعه ها

• استفاده از دیاگرام ون



$$A - B = A \cap B^c$$

$$A \cap B$$

$$A \cup B$$

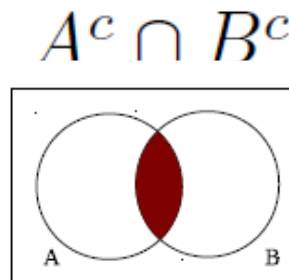
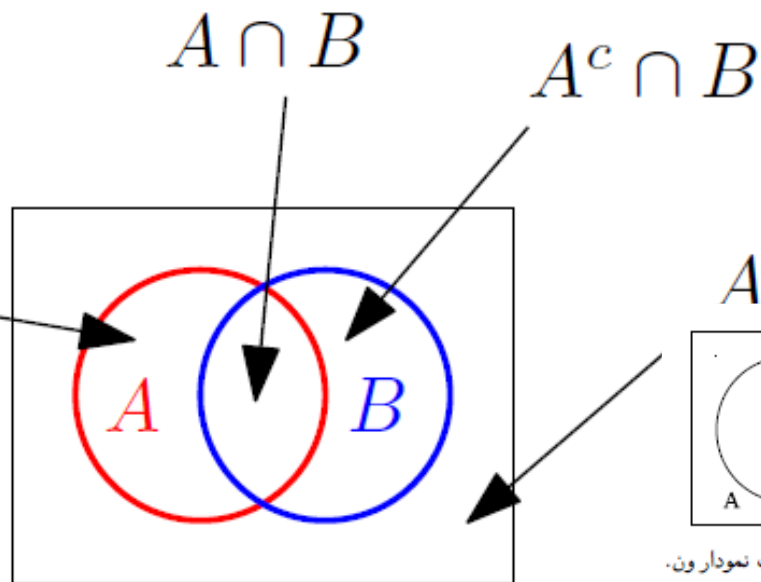
قوانین مجموعه ها

• استفاده از دیاگرام ون

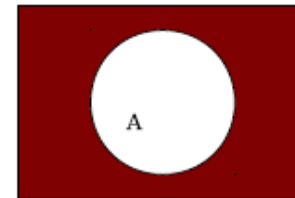
$$A - B = A \cap B^c$$

$$A \cap B$$

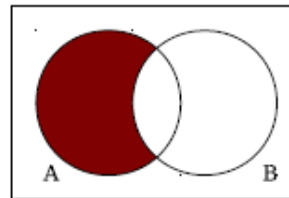
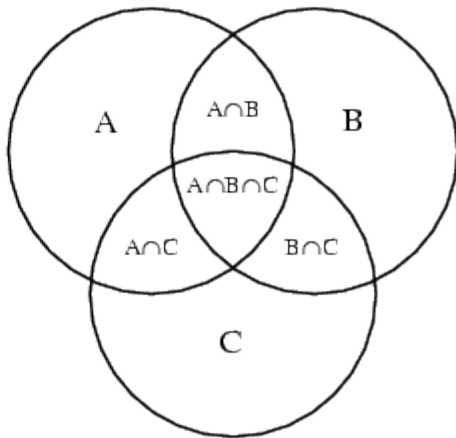
$$A \cup B$$



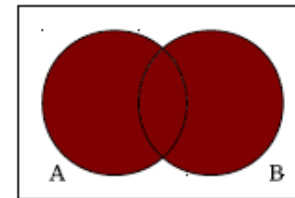
شکل ۲: نمایش AB به کمک نمودار ون.



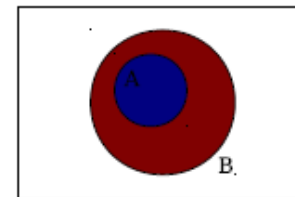
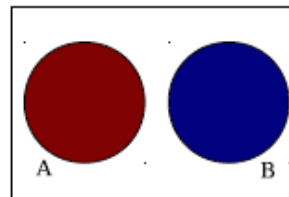
شکل ۱: نمایش A^c به کمک نمودار ون.



شکل ۴: نمایش $A \setminus B$ به کمک نمودار ون.



شکل ۳: نمایش $A \cup B$ به کمک نمودار ون.



شکل ۵: نمایش $A \subseteq B$ به کمک نمودار ون. شکل ۶: نمایش $AB = \emptyset$ به کمک نمودار ون.

قوانین مجموعه ها

- توزیع اشتراک روی اجتماع و بالعکس

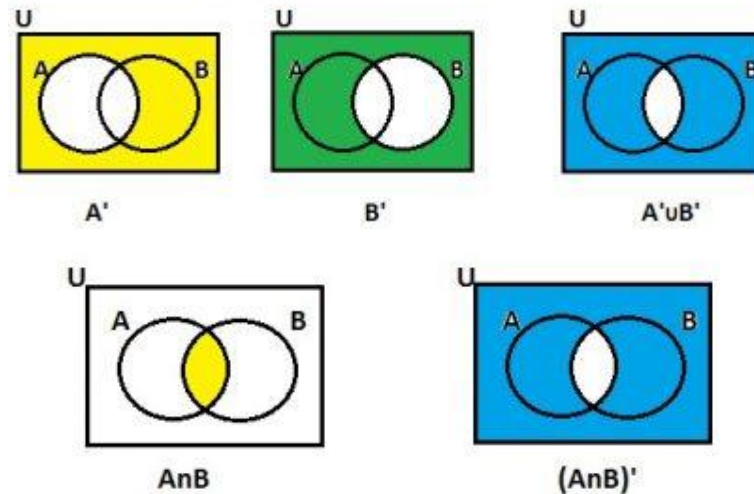
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- قوانین دمورگان

$$(A \cup B)^c = (A^c \cap B^c)$$

$$(A \cap B)^c = (A^c \cup B^c)$$



$$\left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^n E_i^c$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^n E_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^n E_i^c$$

- تعمیم قوانین دمورگان

اصول احتمال

- تعریف احتمال پیشامد
- نسبت تعداد دفعات رخ دادن پیشامد A در n آزمایش وقتی که n به سمت بینهایت میل می کند.

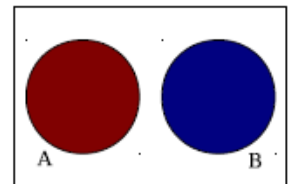
$$\Pr(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n}$$

- اصول احتمال

$$1) 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$2) P(S) = 1$$

$$3) A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



قضایای احتمال

$$1) P(\phi) = 0$$

$$\phi \cap S = \phi, 1 = P\{S\} = P\{\phi \cup S\} = P\{\phi\} + P\{S\} \quad \bullet \text{ اثبات}$$

$$P\{\phi\} = 0$$

$$3) P\{B - A\} = P(B) - P(A \cap B)$$

$$4) A \subseteq B \Rightarrow P\{A\} \leq P\{B\}$$

$$5) P\{A \cup B\} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\begin{cases} A \cup B = (B - A) \cup A \\ (B - A) \cap A = \phi \end{cases} \Rightarrow P\{A \cup B\} = P(B - A) + P(A) \quad \bullet \text{ اثبات}$$

$$\Rightarrow P\{A \cup B\} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

• تعمیم قضیه اجتماع

$$1) P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - \\ P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + \\ P(A \cap B \cap C)$$

$$2) P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \\ \sum_{i_1 < i_2 < i_3} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) \dots \\ + (-1)^n P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{i_3})$$

فضای نمونه ی هم شانس

- فضای نمونه را هم شانس گوئیم اگر اگر همه پیشامدهای ساده هم احتمال باشند.

$$S = \{1, 2, \dots, N\} \Rightarrow P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots P(\{N\}) = \frac{1}{N}$$

– مثال: پرتاب تاس

فضای نمونه ی هم شانس

- فضای نمونه را هم شانس گوئیم اگر اگر همه پیشامدهای ساده هم احتمال باشند.

$$S = \{1, 2, \dots, N\} \Rightarrow P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots P(\{N\}) = \frac{1}{N}$$

– مثال: پرتاب تاس

- **مثال:** احتمال رخ دادن مجموع ۶ در پرتاب دو تاس (فضای هم شانس برای هر تاس)
$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), \dots, (1,6), \\ (2,1), (2,2), \dots, (2,6), \\ \vdots \\ (6,1), (6,2), \dots, (6,6) \end{array} \right\} \Rightarrow n(S) = 36$$

$$A = \left\{ \begin{array}{l} (1,5), (2,4), (3,3) \\ (4,2), (5,1) \end{array} \right\} \Rightarrow n(A) = 5$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

مثال

- احتمال آنکه در پرتاب ۴ تاس حداقل عدد ۶ یکبار ظاهر شود؟

مثال

• احتمال آنکه در پرتاب ۴ تاس حداقل عدد ۶ یکبار ظاهر شود؟

• راه حل اول : حل مستقیم

– A1: یکبار ۶ ظاهر شود

– A2: دوبار ۶ ظاهر شود

– A3: سه بار ۶ ظاهر شود

– A4: چهار بار ۶ ظاهر شود

$$n(S) = 6^4 = 1296$$

$$n(A1) = \binom{4}{1} * 1 * 5^3 = 500$$

$$n(A2) = \binom{4}{2} * 1^2 * 5^2 = 150$$

$$n(A3) = \binom{4}{3} * 1^3 * 5 = 20$$

$$n(A4) = \binom{4}{4} * 1^4 = 1$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{500 + 150 + 20 + 1}{1296} = \frac{671}{1296}$$

مثال

- احتمال آنکه در پرتاب ۴ تاس حداقل عدد ۶ یکبار ظاهر شود؟

- راه حل اول : حل مستقیم

– A1: یکبار ۶ ظاهر شود

– A2: دوبار ۶ ظاهر شود

– A3: سه بار ۶ ظاهر شود

– A4: چهار بار ۶ ظاهر شود

$$n(S) = 6^4 = 1296$$

$$n(A1) = \binom{4}{1} * 1 * 5^3 = 500$$

$$n(A2) = \binom{4}{2} * 1^2 * 5^2 = 150$$

$$n(A3) = \binom{4}{3} * 1^3 * 5 = 20$$

$$n(A4) = \binom{4}{4} * 1^4 = 1$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{500 + 150 + 20 + 1}{1296} = \frac{671}{1296}$$

- راه حل دوم: استفاده از متمم مجموعه

A^c : در پرتاب ۴ تاس هیچ عدد ۶ نباشد

$$n(S) = 6^4 = 1296$$

$$n(A^c) = 5^4 = 625 \Rightarrow P(A^c) = \frac{625}{1296}$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{571}{1296}$$

مثال

- در ظرفی شامل ۴ توپ قرمز، ۵ توپ سیاه و ۷ توپ سفید وجود دارد. اگر از این ظرف سه توپ انتخاب کنیم احتمال آنکه دو توپ سفید و یک توپ سیاه باشد چقدر است؟

مثال

- در ظرفی شامل ۴ توپ قرمز، ۵ توپ سیاه و ۷ توپ سفید وجود دارد. اگر از این ظرف سه توپ انتخاب کنیم احتمال آنکه دو توپ سفید و یک توپ سیاه باشد چقدر است؟

- **راه حل اول:** برداشتن همزمان ۳ توپ (ترکیب)

$$\left. \begin{array}{l} n(S) = \binom{16}{3} = 560 \\ n(A) = \binom{7}{2} \binom{5}{1} = 105 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) = \frac{105}{560} = \frac{3}{16}$$

مثال

- در ظرفی شامل ۴ توپ قرمز، ۵ توپ سیاه و ۷ توپ سفید وجود دارد. اگر از این ظرف سه توپ انتخاب کنیم احتمال آنکه دو توپ سفید و یک توپ سیاه باشد چقدر است؟

- **راه حل اول:** برداشتن همزمان ۳ توپ (ترکیب)

$$\left. \begin{aligned} n(S) &= \binom{16}{3} = 560 \\ n(A) &= \binom{7}{2} \binom{5}{1} = 105 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(A) = \frac{105}{560} = \frac{3}{16}$$

- **راه حل دوم:** برداشتن یکی یکی توپها (ترتیب)

$$\left. \begin{aligned} n(S) &= 16 * 15 * 14 = 3360 \\ n(A) &= \underbrace{7 * 6 * 5}_{WWB} + \underbrace{7 * 5 * 6}_{WBW} + \underbrace{5 * 7 * 6}_{BWW} = 630 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(A) = \frac{630}{3360} = \frac{3}{16}$$

مثال

- اگر در اتاقی n نفر باشند احتمال آنکه هیچ دو نفری در یک روز به دنیا نیامده باشند چقدر است؟

• حل:

مثال

- اگر در اتاقی n نفر باشند احتمال آنکه هیچ دو نفری در یک روز به دنیا نیامده باشند چقدر است؟

- **حل:** برای نفر اول ۳۶۵ روز وجود دارد، نفر دوم همه روزها به غیر از روز تولد نفر اول، نفر دوم همه روزها به غیر از روز تولد نفرات اول و دوم و... بنابراین احتمال آن به صورت زیر است:

$$\left. \begin{aligned} n(S) &= \underbrace{365 * 365 * \dots * 365}_n = 365^n \\ n(A) &= \underbrace{365 * 364 * \dots * (365 - n + 1)}_n \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(A) = \frac{365 * 364 * \dots * (365 - n + 1)}{365^n}$$

نکته بسیار جالب: اگر $n > 23$ باشد احتمال کمتر از ۰.۵ است.

مثال

- ۸ رخ در یک صفحه شطرنج قرار گرفته اند. احتمال آن را حساب کنید که آنها هم را تهدید نکنند.



مثال

- ۸ رخ در یک صفحه شطرنج قرار گرفته اند. احتمال آن را حساب کنید که آنها هم را تهدید نکنند.



- **حل:** رخ اول در ۶۴ خانه می تواند قرار گیرد و همه اعضای سطر و ستون را تهدید می کند. همان طور که در شکل مشخص است تعداد آنها ۱۵ است. بنابراین رخ دوم در $64 - 15 = 49$ خانه می تواند قرار گیرد. برای رخ دوم نیز ۱۵ خانه وجود دارد ولی به جهت آنکه دو خانه با حذفیات بالا اشتراک دارد به جای ۱۵ برابر ۱۳ خواهد شد. $49 - 13 = 36$ و به همین ترتیب ادامه پیدا می کند.

$$\left. \begin{array}{l} n(S) = 64 * 63 * 62 * \dots * 57 \\ n(A) = 64 * 49 * 36 * \dots * 1 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) = \frac{64 * 49 * 36 * \dots * 1}{64 * 63 * 62 * \dots * 57}$$

مثال

- اگر در اتاقی n نفر باشند احتمال آنکه هیچ دو نفری در یک روز به دنیا نیامده باشند چقدر است؟

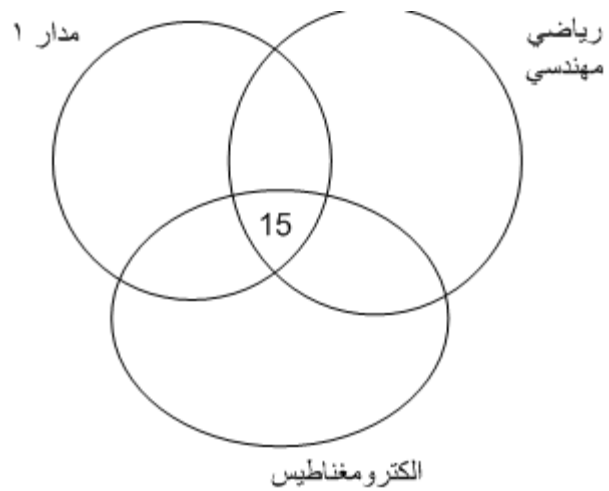
- **حل:** برای نفر اول ۳۶۵ روز وجود دارد، نفر دوم همه روزها به غیر از روز تولد نفر اول، نفر دوم همه روزها به غیر از روز تولد نفرات اول و دوم و... بنابراین احتمال آن به صورت زیر است:

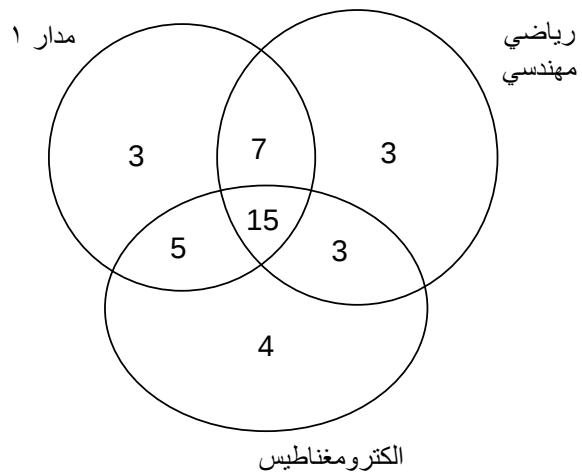
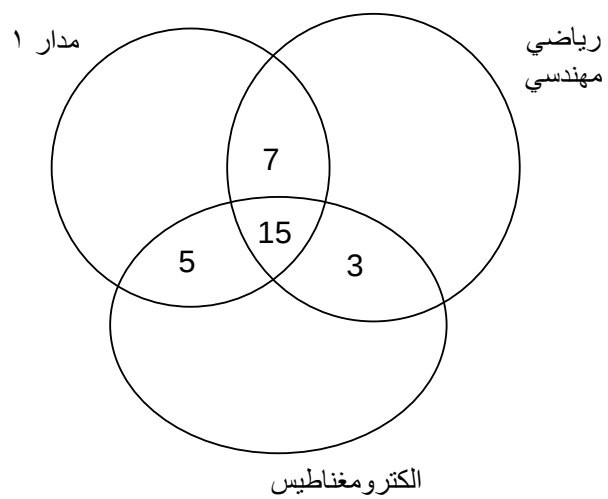
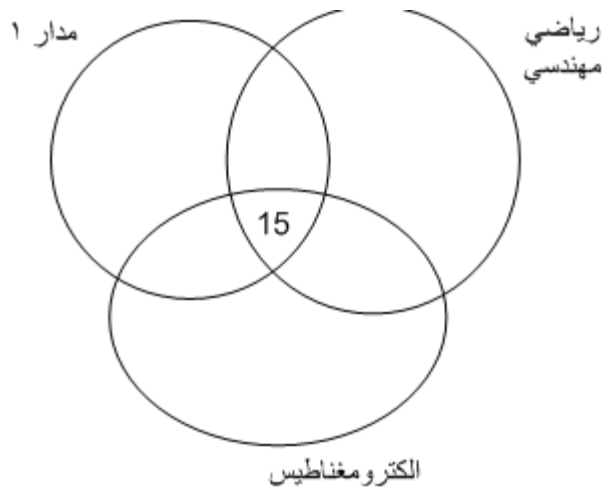
$$\left. \begin{aligned} n(S) &= \underbrace{365 * 365 * \dots * 365}_n = 365^n \\ n(A) &= \underbrace{365 * 364 * \dots * (365 - n + 1)}_n \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(A) = \frac{365 * 364 * \dots * (365 - n + 1)}{365^n}$$

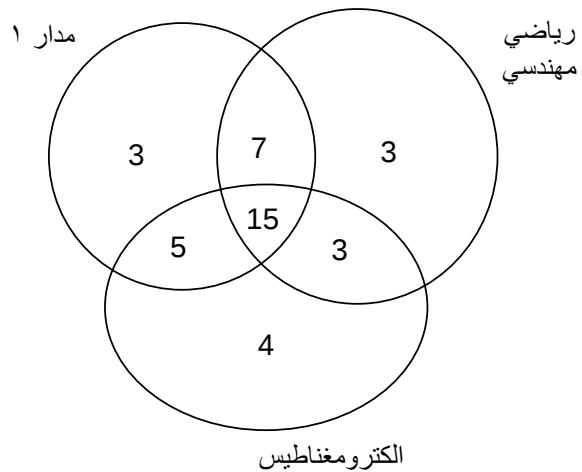
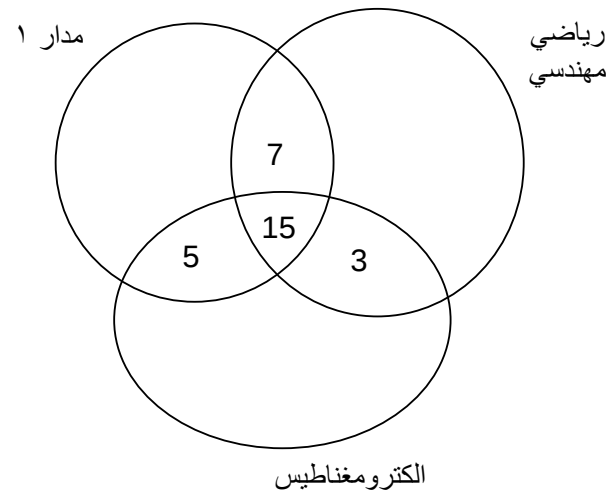
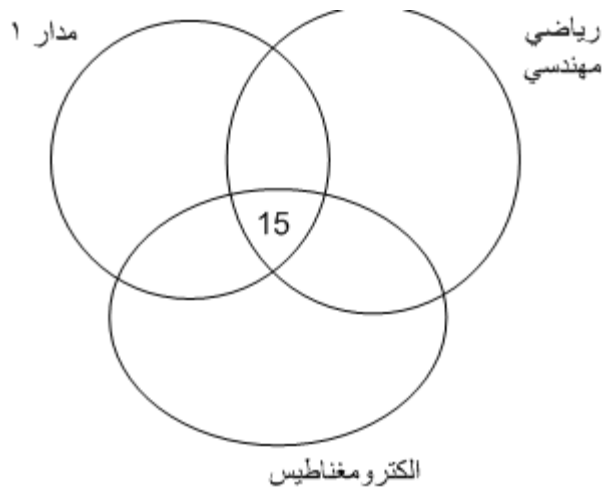
نکته بسیار جالب: اگر $n > 23$ باشد احتمال کمتر از ۰.۵ است.

مثال

- در رشته مهندسی برق دانشگاه ۶۰ نفر ثبت نام کرده اند. اگر در درس مدار ۱ ۳۰ نفر، در درس ریاضی مهندسی ۲۸ نفر، ۲۷ نفر در درس الکترومغناطیس، ۲۲ نفر در دو درس مدار ۱ و ریاضی مهندسی، ۲۰ نفر در دو درس مدار ۱ و الکترومغناطیس، ۱۸ نفر در دو درس ریاضی مهندسی و الکترومغناطیس و ۱۵ نفر در هر سه درس ثبت نام کرده اند. یک نفر به تصادف از این کلاس انتخاب شده است.
- الف) با چه احتمالی وی تنها در دو درس ثبت نام کرده است؟
- ب) با چه احتمالی وی فقط در درس مدار ۱ ثبت نام کرده است؟
- پ) با چه احتمالی در هیچ درسی ثبت نام نکرده است؟







$$a) P1 = \frac{3+5+7}{60} = \frac{1}{4}$$

$$b) P2 = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$$

$$c) P3 = \frac{60 - (3+3+4+3+5+7+15)}{60} = \frac{1}{3}$$

مثال

- در ظرفی ۵۲ توپ از ۴ رنگ مختلف وجود دارد که هر یک از آنها از شماره‌های ۱ تا ۱۳ شماره گذاری شده اند. ۵ توپ را به تصادف و بدون جایگذاری از این از ظرف بیرون می آوریم. احتمال آنکه این ۵ توپ هم رنگ نبوده و شماره های آنها پشت سر هم باشد را محاسبه کنید.

مثال

- در ظرفی ۵۲ توپ از ۴ رنگ مختلف وجود دارد که هر یک از آنها از شماره‌های ۱ تا ۱۳ شماره گذاری شده اند. ۵ توپ را به تصادف و بدون جایگذاری از این ظرف بیرون می آوریم. احتمال آنکه این ۵ توپ هم رنگ نبوده و شماره های آنها پشت سر هم باشد را محاسبه کنید.

$$n(S) = \binom{52}{5}$$

• حل

• تعداد کل حالات

- حالاتی که اعداد می توانند پشت سر هم باشند

1,2,3,4,5

2,3,4,5,6

⋮

9,10,11,12,13

ادامه مثال

- حالاتی که ۵ توپ هم رنگ نیستند

– کل حالات

$$4 * 4 * 4 * 4 * 4 = 4^5 = 1024$$

– حالاتی که توپها هم رنگ هستند.

$$4 * 1 * 1 * 1 * 1 = 4$$

– حالاتی که هم رنگ نیستند $1024 - 4 = 1020$

- احتمال

$$P = \frac{9 * 1020}{\binom{52}{5}}$$

مثال

- در ظرفی ۵۲ توپ از ۴ رنگ مختلف وجود دارد که هر یک از آنها از شماره‌های ۱ تا ۱۳ شماره گذاری شده اند. ۵ توپ را به تصادف و بدون جایگذاری از این ظرف بیرون می آوریم. احتمال آنکه ۴ توپ از این ۵ توپ شماره ۷ باشند را محاسبه کنید.

- حل
-

مثال

- در ظرفی ۵۲ توپ از ۴ رنگ مختلف وجود دارد که هر یک از آنها از شماره‌های ۱ تا ۱۳ شماره گذاری شده اند. ۵ توپ را به تصادف و بدون جایگذاری از این ظرف بیرون می آوریم. احتمال آنکه ۴ توپ از این ۵ توپ شماره ۷ باشند را محاسبه کنید.

• حل

- تعداد کل حالات

$$n(S) = \binom{52}{5}$$

- اولین توپ حالت، دومی و سومی و چهارمی یک عدد و عدد پنجم ۴۸ حالت (همه حالات بدون ۴ عدد انتخابی)

$$P = \frac{\binom{4}{4} * 48}{\binom{52}{5}}$$

مثال

- در ظرفی ۵۲ توپ از ۴ رنگ مختلف وجود دارد که هر یک از آنها از شماره‌های ۱ تا ۱۳ شماره گذاری شده اند. ۵ توپ را به تصادف و بدون جایگذاری از این ظرف بیرون می آوریم. احتمال آنکه ۳ توپ از این ۵ توپ دارای یک شماره و ۲ دوتوپ دیگر شماره دیگر باشند را محاسبه کنید.

حل

•

مثال

- در ظرفی ۵۲ توپ از ۴ رنگ مختلف وجود دارد که هر یک از آنها از شماره‌های ۱ تا ۱۳ شماره گذاری شده اند. ۵ توپ را به تصادف و بدون جایگذاری از این ظرف بیرون می آوریم. احتمال آنکه ۳ توپ از این ۵ توپ دارای یک شماره و ۲ دوتوپ دیگر شماره دیگر باشند را محاسبه کنید.

حل

$$n(S) = \binom{52}{5}$$

- تعداد کل حالات

- اولین عدد ۱۳ انتخاب دارد و باید از ۴ رنگ آن ۳ انتخاب شود. برای عدد دوم ۱۲ حالت وجود دارد و باید از ۴ رنگ مربوط به آن ۲ رنگ انتخاب شود

$$P = \frac{13 * \binom{4}{3} * 12 * \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$$

مثال

- یک کیسه شامل ۱۰ جفت کفش متفاوت است. ۵ لنگه را به تصادف بیرون می آوریم. احتمال آنکه هیچ دو تایی از این لنگه ها با هم جفت نباشند را به دست آورید.

مثال

- یک کیسه شامل ۱۰ جفت کفش متفاوت است. ۵ لنگه را به تصادف بیرون می آوریم. احتمال آنکه هیچ دو تایی از این لنگه ها با هم جفت نباشند را به دست آورید.

پاسخ مجموعه‌ی ده جفت کفش را به صورت $S = \{L_1, R_1, L_2, R_2, \dots, L_{10}, R_{10}\}$ نشان می‌دهیم، که در آن R_i و L_i لنگه‌های سمت راست و چپ کفش i ام می‌باشند. فضای نمونه‌ای شامل تمام انتخاب‌های ۵ لنگه کفش از میان این ۲۰ لنگه کفش است. به دو صورت می‌توان آزمایش بیرون کشیدن پنج لنگه کفش را انجام داد. انتخاب یکی یکی پنج لنگه و انتخاب یک‌باره پنج لنگه. فضای نمونه‌ای برای این دو مدل متفاوت است.

- راه حل اول ترتیب

$$n(S) = 20 * 19 * 18 * 17 * 16$$

- تعداد کل

$$n(A) = 20 * 18 * 16 * 14 * 12$$

- تعداد حالاتی که جفت نباشند

$$P = \frac{n(A)}{n(S)} = 0.52$$

ادامه حل مثال

راه حل دوم : ترکیب

- تعداد کل

$$n(S) = \binom{20}{5}$$

- باید از ۱۰ جفت کفش ۵ جفت انتخاب شود و از

هر جفت یک لنگه برداشته شود

$$n(A) = \binom{10}{5} * 2^5$$

$$P = \frac{n(A)}{n(S)} = 0.52$$

- **تمرین:** احتمال پیشامد از ۵ لنگه یک جفت و سه لنگه از سه جفت کفش متفاوت باشد را محاسبه کنید.

- اگر بخواهیم یک N شی متفاوت را کنار هم بچینیم، $N!$ حالت وجود دارد
- اگر N شی متفاوت را کنار دور یک دایره بچینیم چون ابتدا و انتها مهم نیست $(N-1)!$ حالت وجود دارد.
- ابتدا و انتها وجود ندارد.

مثال

- یک کیسه شامل ۱۰ جفت کفش متفاوت است. این ۲۰ لنگه را به صورت دایره می چینیم. احتمال آنکه هیچ دو کفش از یک جفت کنار هم نباشند.

مثال

- یک کیسه شامل ۱۰ جفت کفش متفاوت است. این ۲۰ لنگه را به صورت دایره می چینیم. احتمال آنکه هیچ دو کفش از یک جفت کنار هم نباشند.

• **حل:**

- استفاده از متمم یعنی حداقل یک جفت کنار هم قرار بگیرند

• تعداد کل حالات ۱۹!

- E_i : پیشامد آنکه R_i و L_i کنار هم باشند.

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(E_{i_1} \cap E_{i_2}) \\ + \dots - P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n)$$

ادامه حل مثال

$$n(E_i) -$$

– عنصر Ri و Li و حذف یک عضو جدید به جای این دو عضو

– جابه جایی دو عضو $2!$

$$n(E_i) = 2! * 18!$$

– عنصر $Ri1$ و $Li1$ و حذف یک عضو جدید به جای این دو عضو

– عنصر $Ri2$ و $Li2$ و حذف یک عضو جدید به جای این دو عضو

$$n(E_i) = (2 * 2!) * 17!$$

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = 10 * \frac{18!}{19!} - \binom{10}{2} \frac{17!}{19!} + \dots - \binom{10}{10} \frac{9!}{19!}$$

مثال

- دو تاس را آنقدر پرتاب می کنیم تا عدد ۵ یا ۷ ظاهر شود. شما به شرطی برنده خواهید شد که عدد ۵ ظاهر شود. احتمال برنده شدن خود را محاسبه کنید.

مثال

- دو تاس را آنقدر پرتاب می کنیم تا عدد ۵ یا ۷ ظاهر شود. شما به شرطی برنده خواهید شد که عدد ۵ ظاهر شود. احتمال برنده شدن خود را محاسبه کنید.

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), \dots, (1,6), \\ (2,1), (2,2), \dots, (2,6), \\ \vdots \\ (6,1), (6,2), \dots, (6,6) \end{array} \right\} \Rightarrow n(S) = 36$$

- حل:
- در پرتاب دو تاس

$$A = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\} \Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{4}{36}$$

$$B = \left\{ \begin{array}{l} (1,6), (2,5), (3,4) \\ , (4,3), (5,2), (6,1) \end{array} \right\} \Rightarrow n(B) = 6 \Rightarrow P(B) = \frac{6}{36}$$

مثال

- دو تاس را آنقدر پرتاب می کنیم تا عدد ۵ یا ۷ ظاهر شود. شما به شرطی برنده خواهید شد که عدد ۵ ظاهر شود. احتمال برنده شدن خود را محاسبه کنید.

- حل:
- در پرتاب دو تاس

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), \dots, (1,6), \\ (2,1), (2,2), \dots, (2,6), \\ \vdots \\ (6,1), (6,2), \dots, (6,6) \end{array} \right\} \Rightarrow n(S) = 36$$
$$A = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\} \Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{4}{36}$$

$$B = \left\{ \begin{array}{l} (1,6), (2,5), (3,4) \\ (4,3), (5,2), (6,1) \end{array} \right\} \Rightarrow n(B) = 6 \Rightarrow P(B) = \frac{6}{36}$$

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B)) =$$

$$1 - \frac{4}{36} - \frac{6}{36} = \frac{26}{36}$$

ادامه حل

- **E1:** در پرتاب اول برنده شوید (در پرتاب اول عدد ۵ ظاهر شود)

$$P(E1) = \frac{4}{36}$$

- **E2:** در پرتاب دوم برنده شوید (در پرتاب اول عددی غیر از ۵ و ۷ ظاهر شود و در پرتاب دوم ۵ ظاهر شود)

$$P(E2) = \frac{26}{36} * \frac{4}{36}$$

- **E3:** در پرتاب سوم برنده شوید (در پرتاب اول و دوم عددی غیر از ۵ و ۷ ظاهر شود و در پرتاب سوم ۵ ظاهر شود)

$$P(E3) = \frac{26}{36} * \frac{26}{36} * \frac{4}{36}$$

...

- احتمال برنده شدن

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_\infty)$$

- چون این E_i ها ناسازگارند بنابراین:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_\infty) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{26}{36}\right)^{i-1} \left(\frac{4}{36}\right) = \frac{\frac{4}{36}}{1 - \frac{26}{36}} = \frac{4}{10} \end{aligned}$$

احتمال مهندسی

فصل سوم: احتمال شرطی و استقلال

● احتمال شرطی

● قانون بیز

● مثال‌های مربوط

احتمال شرطی

- وقتی که بدانیم یک اتفاقی افتاده که موجب شده فضای نمونه کوچکتر شود برای محاسبه احتمال از لفظ احتمال شرطی استفاده می کنیم.

احتمال شرطی

- وقتی که بدانیم یک اتفاقی افتاده که موجب شده فضای نمونه کوچکتر شود برای محاسبه احتمال از لفظ احتمال شرطی استفاده می کنیم.
- کاربرد احتمال شرطی
 - محاسبه احتمال با شرط
 - محاسبه احتمال با چند پارامتر

احتمال شرطی

- وقتی که بدانیم یک اتفاقی افتاده که موجب شده فضای نمونه کوچکتر شود برای محاسبه احتمال از لفظ احتمال شرطی استفاده می کنیم.

- کاربرد احتمال شرطی

- محاسبه احتمال با شرط

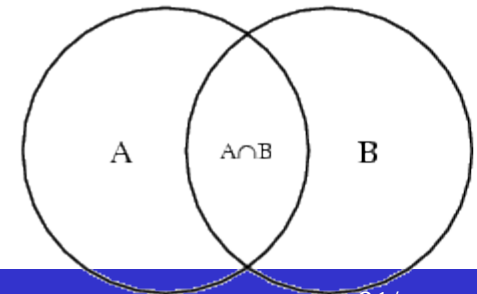
- محاسبه احتمال با چند پارامتر

- مثال

- پرتاب تاس با علم به آنکه نتیجه زوج باشد.

- رابطه احتمال شرطی

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



احتمال شرطی

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

- در مسایل احتمال شرطی مهمترین نکته در حل مسایل تعریف دقیق پیشامدهاست.

احتمال شرطی

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

• در مسایل احتمال شرطی مهمترین نکته در حل مسایل تعریف دقیق پیشامدهاست.

مثال: خانواده ای دارای دو فرزند است. اگر یکی از انها پسر باشد احتمال آنکه هر دو فرزند پسر باشند چقدر است؟
حل:

E: پیشامد آنکه حداقل یکی از فرزندان پسر باشد.

F: پیشامد آنکه هر دو فرزند پسر باشند.

$$S = \{(g, g), (g, b), (b, g), (b, b)\}$$

احتمال شرطی

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A | B)P(B)$$

• در مسایل احتمال شرطی مهمترین نکته در حل مسایل تعریف دقیق پیشامدهاست.

مثال: خانواده ای دارای دو فرزند است. اگر یکی از انها پسر باشد احتمال آنکه هر دو فرزند پسر باشند چقدر است؟
حل:

E: پیشامد آنکه حداقل یکی از فرزندان پسر باشد.
F: پیشامد آنکه هر دو فرزند پسر باشند.

$$S = \{(g, g), (g, b), (b, g), (b, b)\}$$

$$E = \{(g, b), (b, g), (b, b)\}$$

$$F = \{(b, b)\} \Rightarrow F \cap E = \{(b, b)\}$$

$$P(F | E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

احتمال شرطی

مثال: خانواده ای دارای دو فرزند است. اگر فرزند اول پسر باشد احتمال آنکه هر دو فرزند پسر باشند چقدر است؟
حل:

E: پیشامد آنکه فرزند اول پسر باشد.

F: پیشامد آنکه هر دو فرزند پسر باشند.

$$S = \{(g, g), (g, b), (b, g), (b, b)\}$$

$$E = \{(b, g), (b, b)\}$$

$$F = \{(b, b)\} \Rightarrow F \cap E = \{(b, b)\}$$

$$P(F | E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$$

مثال

• دوتاس را باهم پرتاب می کنیم. اگر بدانیم حداقل یکی از آنها ۶ باشد به شرط آنکه بدانیم نتیجه دوتاس متفاوت است چقدر است؟

مثال

دوتاس را باهم پرتاب می کنیم. اگر بدانیم حداقل یکی از آنها ۶ باشد به شرط آنکه بدانیم نتیجه دوتاس متفاوت است چقدر است؟

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), \dots, (1,6), \\ (2,1), (2,2), \dots, (2,6), \\ \vdots \\ (6,1), (6,2), \dots, (6,6) \end{array} \right\}$$

حل:

S: پیشامد پرتاب دوتاس

B: پیشامد نتیجه متفاوت دو تاس

A: پیشامد حضور ۶ در پرتاب

مثال

دوتاس را باهم پرتاب می کنیم. اگر بدانیم حداقل یکی از آنها ۶ باشد به شرط آنکه بدانیم نتیجه دوتاس متفاوت است چقدر است؟

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), \dots, (1,6), \\ (2,1), (2,2), \dots, (2,6), \\ \vdots \\ (6,1), (6,2), \dots, (6,6) \end{array} \right\}$$

حل:

S: پیشامد پرتاب دوتاس

B: پیشامد نتیجه متفاوت دو تاس

A: پیشامد حضور ۶ در پرتاب

$$B = \left\{ \begin{array}{l} (1,2), \dots, (1,5), (1,6), \\ (2,1), (2,3), \dots, (2,6), \\ \vdots \\ (6,1), (6,2), \dots, (6,5) \end{array} \right\} \Rightarrow n(B) = 30$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{10}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{1}{3}$$

$$A = \left\{ \begin{array}{l} (1,6), (6,1), (2,6), \\ (6,2), (3,6), (6,3), \\ \dots, (6,6) \end{array} \right\} \Rightarrow A \cap B = A - \{(6,6)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 10$$

مثال

- در ظرفی ۲۵ لامپ وجود دارد که ۵ عدد از آنها سالم هستند، ۱۰ تای آنها نیمه معیوبند (یعنی در ابتدا روشن می شوند ولی بعد از دو روز خاموش می شوند) و بقیه خرابند. لامپی از این ظرف انتخاب می کنیم. اگر لامپ روشن ۲ شد با چه احتمالی لامپ سالم است؟

مثال

• در ظرفی ۲۵ لامپ وجود دارد که ۵ عدد از آنها سالم هستند، ۱۰ تای آنها نیمه معیوبند (یعنی در ابتدا روشن می شوند ولی بعد از دو روز خاموش می شوند) و بقیه خرابند. لامپی از این ظرف انتخاب می کنیم. اگر لامپ روشن ۲ شد با چه احتمالی لامپ سالم است؟

• حل:

• T : پیشامد روشن شدن اولیه لامپ

• T^c : پیشامد خراب بودن لامپ

• G : پیشامد سالم بودن لامپ

مثال

• در ظرفی ۲۵ لامپ وجود دارد که ۵ عدد از آنها سالم هستند، ۱۰ تای آنها نیمه معیوبند (یعنی در ابتدا روشن می شوند ولی بعد از دو روز خاموش می شوند) و بقیه خرابند. لامپی از این ظرف انتخاب می کنیم. اگر لامپ روشن ۲ شد با چه احتمالی لامپ سالم است؟
• حل:

• T : پیشامد روشن شدن اولیه لامپ

• T^c : پیشامد خراب بودن لامپ

• G : پیشامد سالم بودن لامپ

$$P(G | T) = \frac{P(G \cap T)}{P(T)} = \frac{P(G)}{1 - P(T^c)} = \frac{\frac{5}{25}}{\frac{15}{25}} = \frac{1}{3}$$

تعمیم قانون ضرب احتمال‌ها

- فرض کنید E_1 تا E_n ، n باشند در این صورت:

$$P(E_1 E_2 E_3 \dots E_n) = \\ P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 E_2) \dots P(E_n|E_1 \dots E_{n-1})$$

تعمیم قانون ضرب احتمال‌ها

- فرض کنید E_1 تا E_n باشند در این صورت:

$$P(E_1 E_2 E_3 \dots E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 E_2) \dots P(E_n|E_1 \dots E_{n-1})$$

- مثال: جعبه ای دارای ۶ مهره‌ی سیاه و ۱۲ مهره‌ی سفید وجود دارد. اگر چهار توپ از این کیسه و بدون جایگذاری برداریم احتمال آن را حساب کنید که سه توپ اول سفید و توپ آخر سیاه باشد.

تعمیم قانون ضرب احتمال‌ها

- فرض کنید E_1 تا E_n باشند در این صورت:

$$P(E_1 E_2 E_3 \dots E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 E_2) \dots P(E_n|E_1 \dots E_{n-1})$$

- مثال: جعبه ای دارای ۶ مهره‌ی سیاه و ۱۲ مهره‌ی سفید وجود دارد. اگر چهار توپ از این کیسه و بدون جایگذاری برداریم احتمال آن را حساب کنید که سه توپ اول سفید و توپ آخر سیاه باشد.

• حل

- W_1 : پیشامد آنکه توپ اول سفید باشد.
- W_2 : پیشامد آنکه توپ دوم سفید باشد.
- W_3 : پیشامد آنکه توپ سوم سفید باشد.
- B_4 : پیشامد آنکه توپ چهارم سیاه باشد.

تعمیم قانون ضرب احتمال‌ها

- فرض کنید E_1 تا E_n باشند در این صورت:

$$P(E_1 E_2 E_3 \dots E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 E_2) \dots P(E_n|E_1 \dots E_{n-1})$$

- مثال: جعبه ای دارای ۶ مهره‌ی سیاه و ۱۲ مهره‌ی سفید وجود دارد. اگر چهار توپ از این کیسه و بدون جایگذاری برداریم احتمال آن را حساب کنید که سه توپ اول سفید و توپ آخر سیاه باشد.

• حل

- $W1$: پیشامد آنکه توپ اول سفید باشد.
 $P(W1 \cap W2 \cap W3 \cap B4) =$
- $W2$: پیشامد آنکه توپ دوم سفید باشد.
 $P(W1)P(W2|W1)P(W3|W1 \cap W2)$
- $W3$: پیشامد آنکه توپ سوم سفید باشد.
 $P(W4|W1 \cap W2 \cap W3) =$
- $B4$: پیشامد آنکه توپ چهارم سیاه باشد.
 $\frac{12}{18} * \frac{11}{17} * \frac{10}{16} * \frac{6}{15}$

مثال

- دانشجویی فقط می تواند یکی از دروس الکترومغناطیس و یا مدار ۱ را انتخاب کند. فرض کنید احتمال کسب نمره بیش از ۱۵ در درس الکترومغناطیس برابر ۰.۶ و کسب نمره بیش از ۱۵ در درس مدار ۱ برابر ۰.۷۵ باشد.
اگر او تصمیم بگیرد بر اساس پرتاب یک سکه یکی از این دو درس را انتخاب کند با چه احتمالی نمره بیش از ۱۵ در درس مدار ۱ در پایان این ترم خواهد گرفت.؟

مثال

• دانشجویی فقط می تواند یکی از دروس الکترومغناطیس و یا مدار ۱ را انتخاب کند. فرض کنید احتمال کسب نمره بیش از ۱۵ در درس الکترومغناطیس برابر ۰.۶ و کسب نمره بیش از ۱۵ در درس مدار ۱ برابر ۰.۷۵ باشد. اگر او تصمیم بگیرد بر اساس پرتاب یک سکه یکی از این دو درس را انتخاب کند با چه احتمالی نمره بیش از ۱۵ در درس مدار ۱ در پایان این ترم خواهد گرفت. ؟

• حل:

• E1: پیشامد انتخاب درس مدار ۱

• N: پیشامد کسب نمره بیش از ۱۵

مثال

• دانشجویی فقط می تواند یکی از دروس الکترومغناطیس و یا مدار ۱ را انتخاب کند. فرض کنید احتمال کسب نمره بیش از ۱۵ در درس الکترومغناطیس برابر ۰.۶ و کسب نمره بیش از ۱۵ در درس مدار ۱ برابر ۰.۷۵ باشد. اگر او تصمیم بگیرد بر اساس پرتاب یک سکه یکی از این دو درس را انتخاب کند با چه احتمالی نمره بیش از ۱۵ در درس مدار ۱ در پایان این ترم خواهد گرفت. ؟

• حل:

• E1: پیشامد انتخاب درس مدار ۱

• N: پیشامد کسب نمره بیش از ۱۵

$$P(E1 \cap N) = P(N | E1)P(E1) = 0.75 * \frac{1}{2} = 0.375$$

• اگر E و F دو پیشامد باشند طبق رابطه مجموعه‌ها داریم:
$$E = E \cap S = E \cap (F \cup F^c) = (E \cap F) \cup (E \cap F^c)$$

• با توجه به ناسازگاری دو مجموعه داریم:

$$P(E) = P((E \cap F) \cup (E \cap F^c)) = \\ P(E \cap F) + P(E \cap F^c)$$

• اگر E و F دو پیشامد باشند طبق رابطه مجموعه‌ها داریم:

$$E = E \cap S = E \cap (F \cup F^c) = (E \cap F) \cup (E \cap F^c)$$

• با توجه به ناسازگاری دو مجموعه داریم:

$$\begin{aligned} P(E) &= P((E \cap F) \cup (E \cap F^c)) = \\ &P(E \cap F) + P(E \cap F^c) \end{aligned}$$

• با توجه به احتمال شرطی داریم:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap F) + P(E \cap F^c) \\ &= P(E | F)P(F) + P(E | F^c)P(F^c) \end{aligned}$$

تعمیم مثال قبل

- دانشجویی فقط می تواند یکی از دروس الکترومغناطیس و یا مدار ۱ را انتخاب کند. فرض کنید احتمال کسب نمره بیش از ۱۵ در درس الکترومغناطیس برابر ۰.۶ و کسب نمره بیش از ۱۵ در درس مدار ۱ برابر ۰.۷۵ باشد. اگر او تصمیم بگیرد بر اساس پرتاب یک سکه یکی از این دو درس را انتخاب کند با چه احتمالی نمره بیش از ۱۵ پایان این ترم از درس انتخابی کسب می کند ؟
- حل:

- E1: پیشامد انتخاب درس مدار ۱
- T: پیشامد انتخاب درس الکترومغناطیس
- N: پیشامد کسب نمره بیش از ۱۵

تعمیم مثال قبل

- دانشجویی فقط می تواند یکی از دروس الکترومغناطیس و یا مدار ۱ را انتخاب کند. فرض کنید احتمال کسب نمره بیش از ۱۵ در درس الکترومغناطیس برابر ۰.۶ و کسب نمره بیش از ۱۵ در درس مدار ۱ برابر ۰.۷۵ باشد. اگر او تصمیم بگیرد بر اساس پرتاب یک سکه یکی از این دو درس را انتخاب کند با چه احتمالی نمره بیش از ۱۵ پایان این ترم از درس انتخابی کسب می کند ؟
- حل:

- E1: پیشامد انتخاب درس مدار ۱
- T: پیشامد انتخاب درس الکترومغناطیس
- N: پیشامد کسب نمره بیش از ۱۵

$$P(N) = P(N | E1)P(E1) + P(N | T)P(T)$$

$$= 0.75 * \frac{1}{2} + 0.6 * \frac{1}{2} = 0.675$$

قانون بیز

- اگر A و B دو پیشامد باشند می دانیم:

$$P(A \cap B) = P(A | B)P(B) = P(B | A)P(A)$$

- در بسیاری از کاربردها $P(A|B)$ وجود ندارد ولی در عوض $P(B|A)$ وجود دارد در این صورت می توان از قانون بیز برای محاسبه احتمال استفاده نمود:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B)}$$

مثال

- یک شرکت بیمه افراد جامعه را به دو دسته مستعد تصادف و غیر مستعد تصادف تقسیم نموده است. آمار این شرکت نشان می دهد هر فرد مستعد با احتمال ۰.۴ در سال تصادف می کند در حالی که برای فرد غیر مستعد این مقدار برابر ۰.۲ است. اگر 30% افراد جامعه مستعد تصادف باشند احتمال آنکه یک فرد بیمه شده در سال تصادف کند چقدر است؟

مثال

- یک شرکت بیمه افراد جامعه را به دو دسته مستعد تصادف و غیر مستعد تصادف تقسیم نموده است. آمار این شرکت نشان می دهد هر فرد مستعد با احتمال ۰.۴ در سال تصادف می کند در حالی که برای فرد غیر مستعد این مقدار برابر ۰.۲ است. اگر 30% افراد جامعه مستعد تصادف باشند احتمال آنکه یک فرد بیمه شده در سال تصادف کند چقدر است؟

• حل:

• A: پیشامد تصادف برای فرد بیمه شده

• B: مستعد تصادف

• B^c : غیر مستعد تصادف

مثال

- یک شرکت بیمه افراد جامعه را به دو دسته مستعد تصادف و غیر مستعد تصادف تقسیم نموده است. آمار این شرکت نشان می دهد هر فرد مستعد با احتمال ۰.۴ در سال تصادف می کند در حالی که برای فرد غیر مستعد این مقدار برابر ۰.۲ است. اگر 30% افراد جامعه مستعد تصادف باشند احتمال آنکه یک فرد بیمه شده در سال تصادف کند چقدر است؟

• حل:

• A: پیشامد تصادف برای فرد بیمه شده

• B: مستعد تصادف

• B^c: غیر مستعد تصادف

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$

$$= 0.4 * \frac{3}{10} + 0.2 * \frac{7}{10} = 0.26$$

مثال (ادامه)

- فرض کنید که یک فرد بیمه شده در سال تصادف کرده باشد. احتمال آنکه او از گروه مستعد باشد چقدر است؟

• حل:

• A : پیشامد تصادف برای فرد بیمه شده

• B : مستعد تصادف

• B^c : غیر مستعد تصادف

• $P(B|A)$

مثال (ادامه)

- فرض کنید که یک فرد بیمه شده در سال تصادف کرده باشد. احتمال آنکه او از گروه مستعد باشد چقدر است؟

• حل:

• A : پیشامد تصادف برای فرد بیمه شده

• B : مستعد تصادف

• B^c : غیر مستعد تصادف

• $P(B|A)$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A | B)P(B)}{P(A)} = \frac{0.4 \cdot 0.3}{0.26} = \frac{12}{26}$$

مثال

- در یک امتحان تستی با ۴ پاسخ، دانشجویی یا پاسخ سوال را می داند یا به صورت شانسی با احتمال ۰.۲۵ جواب صحیح را انتخاب می کند. مطلوب است احتمال آنکه دانشجویی جواب سوالی را می دانسته به شرط آنکه جواب درست داده باشد با فرض اینکه احتمال دانستن جواب هر سوال برای دانشج برابر p است.
-

مثال

- در یک امتحان تستی با ۴ پاسخ، دانشجویی یا پاسخ سوال را می داند یا به صورت شانسی با احتمال ۰.۲۵ جواب صحیح را انتخاب می کند. مطلوب است احتمال آنکه دانشجویی جواب سوالی را می دانسته به شرط آنکه جواب درست داده باشد با فرض اینکه احتمال دانستن جواب هر سوال برای دانشج برابر p است.

- حل:

• T : پیشامد صحیح جواب دادن سوال

• K : پیشامد آنکه جواب سوال را می داند

• K^c : : پیشامد آنکه جواب سوال را نمی داند

• $P(K|T)$

مثال

- در یک امتحان تستی با ۴ پاسخ، دانشجویی یا پاسخ سوال را می داند یا به صورت شانسی با احتمال ۰.۲۵ جواب صحیح را انتخاب می کند. مطلوب است احتمال آنکه دانشجویی جواب سوالی را می دانسته به شرط آنکه جواب درست داده باشد با فرض اینکه احتمال دانستن جواب هر سوال برای دانشجوی برابر p است.

• حل:

• T : پیشامد صحیح جواب دادن سوال

• K : پیشامد آنکه جواب سوال را می داند

• K^c : : پیشامد آنکه جواب سوال را نمی داند

• $P(K|T)$

$$P(K | T) = \frac{P(K \cap T)}{P(T)} = \frac{P(T | K)P(K)}{P(T)} = \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + 0.25 \cdot (1 - p)} = \frac{p}{0.25 + 0.75p}$$

مثال

- برای یک بیماری، نوعی آزمایش خون به کار میرود که در تشخیص افراد بیمار دارای صحت ۹۵٪ است ولی به اشتباه ۱٪ افراد سالم را هم بیمار تشخیص می دهد. فرض کنید ۰.۰۰۵ افراد جامعه دارای این بیماری هستند. اگر فردی جواب آزمایش ان مثبت باشد با چه احتمالی وی بیمار است.
-

مثال

- برای یک بیماری، نوعی آزمایش خون به کار میرود که در تشخیص افراد بیمار دارای صحت ۹۵٪ است ولی به اشتباه ۱٪ افراد سالم را هم بیمار تشخیص می دهد. فرض کنید ۰.۰۰۵ افراد جامعه دارای این بیماری هستند. اگر فردی جواب آزمایش ان مثبت باشد با چه احتمالی وی بیمار است.

• حل:

- C: پیشامد جواب مثبت بیماری
- B: پیشامد بیمار بودن آزمایش دهنده
- B^c: پیشامد سالم بودن آزمایش دهنده

مثال

- برای یک بیماری، نوعی آزمایش خون به کار میرود که در تشخیص افراد بیمار دارای صحت ۹۵٪ است ولی به اشتباه ۱٪ افراد سالم را هم بیمار تشخیص می دهد. فرض کنید ۰.۰۰۵ افراد جامعه دارای این بیماری هستند. اگر فردی جواب آزمایش ان مثبت باشد با چه احتمالی وی بیمار است.

• حل:

• C: پیشامد جواب مثبت بیماری

• B: پیشامد بیمار بودن آزمایش دهنده

• B^c: پیشامد سالم بودن آزمایش دهنده

$$\begin{aligned} P(B | C) &= \frac{P(C | B)P(B)}{P(C)} = \frac{P(C | B)P(B)}{P(C | B)P(B) + P(C | B^c)P(B^c)} \\ &= \frac{0.95 * 0.005}{0.95 * 0.005 + 0.01 * 0.995} = 0.323 \end{aligned}$$

افراز یک مجموعه

- فرض کنید F_1 و F_2 و ... و F_n ، n مجموعه هستند که S را افراز کرده اند یعنی:

$$\bigcup_{i=1}^n F_i = S$$

$$F_i \cap F_j = \phi \text{ if } i \neq j$$

افراز یک مجموعه

- فرض کنید F_1 و F_2 و ... و F_n ، n مجموعه هستند که S را افراز کرده اند یعنی:

$$\bigcup_{i=1}^n F_i = S$$

$$F_i \cap F_j = \phi \text{ if } i \neq j$$

- در این صورت برای محاسبه احتمال پیشامد E با توجه به F_1 تا F_n و تعمیم قضیه بیز داریم:

$$P(E) = P((E \cap F_1) \cup (E \cap F_2) \cup \dots \cup (E \cap F_n)) =$$

$$\sum_{i=1}^n P(E \cap F_i) = \sum_{i=1}^n P(E | F_i) P(F_i)$$

مثال

- سه کارت داریم که تنها تفاوتشان در رنگ آنهاست. یک کارت در دو طرف به رنگ سیاه، یک کارت در دو طرف به رنگ قرمز و یک کارت در یک طرف سیاه و یک طرف قرمز است. از درون کیسه یک کارت بیرون می کشیم و روی میز می گذاریم. رنگ روی این کارت قرمز است. احتمال این که طرف دیگر آن قرمز باشد، چقدر است؟

مثال

- سه کارت داریم که تنها تفاوتشان در رنگ آنهاست. یک کارت در دو طرف به رنگ سیاه، یک کارت در دو طرف به رنگ قرمز و یک کارت در یک طرف سیاه و یک طرف قرمز است. از درون کیسه یک کارت بیرون می کشیم و روی میز می گذاریم. رنگ روی این کارت قرمز است. احتمال این که طرف دیگر آن قرمز باشد، چقدر است؟
- حل:

• RR : پیشامد انتخاب کارت دو رو قرمز

• BB : پیشامد انتخاب کارت دو رو سیاه

• RB : : پیشامد انتخاب کارت یک رو قرمز یک رو سیاه

• R : پیشامد مشاهده یک روی قرمز کارت

• $P(RR|R)$

حل مثال

$$P(RR | R) = \frac{P(R | RR)P(RR)}{P(R)} =$$

$$\frac{P(R | RR)P(RR)}{P(R | RR)P(RR) + P(R | BB)P(BB) + P(R | RB)P(RB)} =$$

$$\frac{P(R | RR)P(RR)}{\underbrace{P(R | RR)P(RR)}_1 + \underbrace{P(R | BB)P(BB)}_0 + \underbrace{P(R | RB)P(RB)}_{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}} = \frac{1 * \frac{1}{3}}{1 * \frac{1}{3} + 0 * \frac{1}{3} + \frac{1}{2} * \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

پیشامدهای مستقل

- اگر $P(A|B)=P(A)$ در این صورت می توان گفت با داشتن B اطلاعات جدیدی درباره A نداریم
- به عبارت دیگر پیشامد A و B از هم مستقل هستند

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \xrightarrow{\text{if } (P(A|B)=P(A))} P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- اگر A و B مستقل باشند پیشامدهای زیر هم از هم مستقل هستند:

A, B^c

B, A^c

A^c, B^c

- ناسازگاری مخالف استقلال

مثال

- سکه ای را دوبار پرتاب می کنیم. اگر E پیشامد شیر آمدن سکه اول و F خط آمدن سکه دوم باشد آیا E و F مستقل هستند؟

• حل:

• E پیشامد شیر آمدن سکه اول

• F پیشامد خط آمدن سکه دوم

$$S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

$$E = \{(H, H), (H, T)\} \Rightarrow P(E) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$F = \{(H, T), (T, T)\} \Rightarrow P(F) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$E \cap F = \{(H, T)\} \Rightarrow P(E \cap F) = \frac{1}{4} = P(E) * P(F)$$

مثال

- دو تاس را همزمان پرتاب می کنیم. اگر E پیشامد ۴ آمدن تاس اول و F پیشامد مجموع ۶ تاس دوم باشد آیا E و F مستقل هستند؟
- حل:

• E پیشامد ۴ آمدن تاس اول

• F پیشامد مجموع ۶ تاس دوم

$$E = \{(4,1), (4,2), \dots, (4,6)\} \Rightarrow P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$F = \{(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)\} \Rightarrow P(F) = \frac{5}{36}$$

$$E \cap F = \{(4,2)\} \Rightarrow P(E \cap F) = \frac{1}{36} \neq P(E) * P(F)$$

مثال

- دو تاس را همزمان پرتاب می کنیم. اگر E پیشامد ۴ آمدن تاس اول و F پیشامد مجموع ۷ تاس دوم باشد آیا E و F مستقل هستند؟
- حل:

• E پیشامد ۴ آمدن تاس اول

• F پیشامد مجموع ۶ تاس دوم

$$E = \{(4,1), (4,2), \dots, (4,6)\} \Rightarrow P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$F = \{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\} \Rightarrow P(F) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$E \cap F = \{(4,2)\} \Rightarrow P(E \cap F) = \frac{1}{36} = P(E) * P(F)$$

مثال

- در ظرفی ۵۲ توپ از ۴ رنگ مختلف (سفید، قرمز، سبز و آبی) وجود دارد که هر یک از آنها از شماره‌های ۱ تا ۱۳ شماره گذاری شده اند. اگر E پیشامد آمدن توپ ۱ و F پیشامد رنگ قرمز باشد آیا E و F مستقل هستند؟
- حل:

• E پیشامد آمدن توپ ۱

• F پیشامد رنگ قرمز

$$P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$P(F) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$P(E \cap F) = \frac{1}{52} = P(E) * P(F)$$

تعمیم استقلال

حال که با تعریف دو پیشامد مستقل آشنا شدیم، می‌خواهیم استقلال را در حالت کلی تعریف کنیم. ممکن است تصور شود که استقلال دویه‌دوی پیشامدها، استقلال تمام پیشامدها را تضمین می‌کند. استقلال دویه‌دو اگرچه لازم است، ولی کافی نیست.

مثلاً اگر $A_1, A_1, \dots, A_7$ مستقل باشند، انتظار داریم روابطی مانند رابطه‌ی زیر برقرار باشند:

$$\Pr(A_1 A_4^c (A_5 \cup A_6^c)) | A_7 A_2 A_3^c = \Pr(A_1 A_4^c (A_5 \cup A_6^c))$$

اما چنین روابطی را از روی استقلال دویه‌دوی پیشامدها نمی‌توان استنتاج کرد. بنا براین تعریفی که برای استقلال چند پیشامد در نظر می‌گیریم، به صورت زیر است.

تعریف پیشامدهای $\{A_1, A_1, \dots, A_n\}$ را مستقل گویند، هرگاه برای هر زیرمجموعه‌ای مانند $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_r}\}$ از مجموعه‌ی فوق، رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\Pr(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r}) = \Pr(A_{i_1}) \Pr(A_{i_2}) \dots \Pr(A_{i_r})$$

مثال ۷ برای استقلال سه پیشامد A, B و C باید داشته باشیم:

$$\Pr(ABC) = \Pr(A) \Pr(B) \Pr(C)$$

$$\Pr(AB) = \Pr(A) \Pr(B)$$

$$\Pr(AC) = \Pr(A) \Pr(C)$$

$$\Pr(BC) = \Pr(B) \Pr(C)$$

مثال

مثال ۸ سه پیشامد دویه دو مستقل مثال بزنید که هر سه از هم مستقل نباشند.
آزمایش دوبار پرتاب سکه‌ای سالم را در نظر بگیرید. پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم:

A: حاصل اولین پرتاب شیر باشد.

B: حاصل دومین پرتاب شیر باشد.

C: حاصل اولین و دومین پرتاب یکسان باشد.

داریم:

$$\Pr(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Pr(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Pr(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Pr(AB) = \frac{1}{4} = \Pr(A) \Pr(B)$$

$$\Pr(BC) = \frac{1}{4} = \Pr(B) \Pr(C)$$

$$\Pr(AC) = \frac{1}{4} = \Pr(A) \Pr(C)$$

$$\Pr(ABC) = \frac{1}{4} \neq \Pr(A) \Pr(B) \Pr(C)$$

مثال

- فرض کنید یک دنباله N تایی از آزمایشهای تصادفی ساده و مستقل در حال انجام است به طوریکه احتمال موفقیت در هر آزمایش برابر p است (احتمال شکست $1-p$). مطلوب است:
- الف) همه N آزمایش با موفقیت انجام شود.
- ب) حداقل یک آزمایش با موفقیت انجام شود.
- حل:

• E_i : پیشامد موفقیت در آزمایش i ام

الف)
$$P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_N) \stackrel{\text{استقلال}}{=} \prod_{i=1}^N P(E_i) = \prod_{i=1}^N p = p^N$$

• ب) با استفاده از متمم: یعنی متمم هیچ آزمایشی درست انجام نشود

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_N) &= 1 - P(E_1^c \cap E_2^c \cap \dots \cap E_N^c) \stackrel{\text{استقلال}}{=} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^N P(E_i^c) = 1 - \prod_{i=1}^N (1-p) = 1 - (1-p)^N \end{aligned}$$

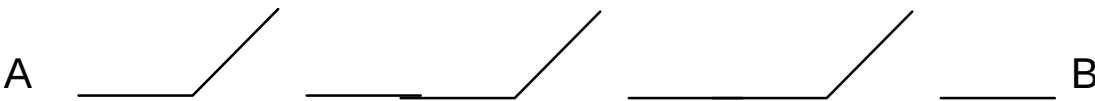
مثال

- فرض کنید یک دنباله N تایی از آزمایشهای تصادفی ساده و مستقل در حال انجام است به طوریکه احتمال موفقیت در هر آزمایش برابر p است (احتمال شکست $1-p$). مطلوب است:
- (پ) دقیقاً k آزمایش با موفقیت انجام شود.
- حل:
- E_i : پیشامد موفقیت در آزمایش i ام
- باید از N آزمایش k تا را انتخاب کرد و آنها حتماً پیروز و بقیه حتماً شکست

$$\binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

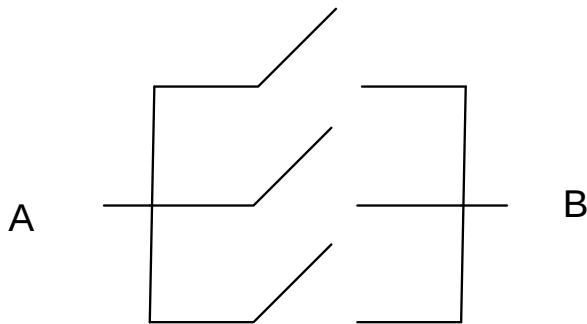
مثال

- فرض کنید یک سویچ با احتمال p وصل میشود و سویچها مستقل باشند. در هر یک از شکلهای زیر احتمال وصل شدن نقطه A به B چقدر است؟
- حل:
- در حالت سری باید همه سویچ ها وصل باشد تا جریان از A به B برسد.



$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \stackrel{\text{استقلال}}{=} \prod_{i=1}^N P(E_i) = p^3$$

- در حالت موازی باید حداقل یکی از سویچها وصل باشد

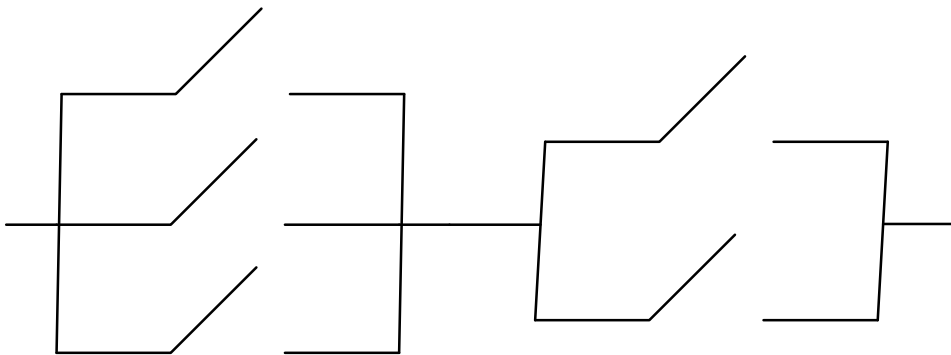


$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = 1 - P(E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c) \stackrel{\text{استقلال}}{=} 1 - \prod_{i=1}^3 P(E_i^c) = 1 - (1 - p)^3$$

مثال

- فرض کنید یک سویچ با احتمال p وصل میشود و سویچها مستقل باشند. در هر یک از شکلهای زیر احتمال وصل شدن نقطه A به B چقدر است؟

• حل: اگر سه سویچ اول را با $C1$ تا $C3$ نشان دهیم و دو سویچ B بعدی را با $C4$ تا $C5$ در این صورت حداقل یکی از $C1$ تا $C3$ و حداقل یکی از $C4$ تا $C5$ روشن باشد در این صورت:



$$P((C_1 \cup C_2 \cup C_3) \cap (C_4 \cup C_5)) = P((C_1 \cup C_2 \cup C_3)) * P(C_4 \cup C_5)$$

$$= (1 - (1 - p)^3)(1 - (1 - p)^2)$$

مثال

- دو تاس را آنقدر پرتاب می کنیم تا مجموع اعداد ۵ یا ۷ ظاهر شود. شما به شرطی برنده خواهید شد که عدد ۵ ظاهر شود. احتمال برنده شدن خود را محاسبه کنید.

- حل: فرض بر استقلال دو تاس است

- راه حل اول در جلسه قبل

- راه حل دوم

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), \dots, (1,6), \\ (2,1), (2,2), \dots, (2,6), \\ \vdots \\ (6,1), (6,2), \dots, (6,6) \end{array} \right\} \Rightarrow n(S) = 36$$

$$A = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\} \Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{4}{36}$$

$$B = \left\{ \begin{array}{l} (1,6), (2,5), (3,4) \\ (4,3), (5,2), (6,1) \end{array} \right\} \Rightarrow n(B) = 6 \Rightarrow P(B) = \frac{6}{36}$$

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B)) =$$

$$1 - \frac{4}{36} - \frac{6}{36} = \frac{26}{36}$$

راه حل دوم

- شرط روی پرتاب اول
- EA در پرتاب اول مجموع ۵ ظاهر شود
- EB در پرتاب اول مجموع ۷ ظاهر شود
- EC در پرتاب اول نه مجموع ۵ و نه مجموع ۷ ظاهر شود
- F پیروزی شخص

$$P(F) = P(F | EA)P(EA) + P(F | EB)P(EB) + P(F | EC)P(EC) =$$

$$1 * \frac{4}{36} + 0 * \frac{6}{36} + P(F) * \frac{26}{36}$$

$$(1 - \frac{26}{36})P(F) = \frac{4}{36} \Rightarrow P(F) = \frac{4}{10}$$

• اگر E و F دو پیشامد ناسازگار باشند احتمال آنکه E قبل از F واقع شود برابر است با (مربوط به آخرین اسلاید درس قبل):

$$\frac{P(E)}{P(E) + P(F)}$$

مثال

فرض کنید در یک بازی دو نفر A و B به ترتیب دو تاس همزمان را پرتاب می کنند. اگر A مجموع ۶ بیاورد برنده است. همچنین اگر B مجموع ۷ بیاورد برنده خواهد شد. اگر A شروع کننده بازی باشد احتمال برنده شدن A چقدر است؟
حل:

مثال

فرض کنید در یک بازی دو نفر A و B به ترتیب دو تاس همزمان را پرتاب می کنند. اگر A مجموع ۶ بیاورد برنده است. همچنین اگر B مجموع ۷ بیاورد برنده خواهد شد. اگر A شروع کننده بازی باشد احتمال برنده شدن A چقدر است؟

$$P(E6) = \frac{5}{36}$$

$$P(E7) = \frac{6}{36}$$

E6: پیشامد آنکه مجموع دو تاس برابر ۶ باشد

E7: پیشامد آنکه مجموع دو تاس برابر ۷ باشد

نکته: با توجه به اینکه به صورت جداگانه تاس ها پرتاب می شود از نکته صفحه قبل نمی توان استفاده نمود.

مثال

فرض کنید در یک بازی دو نفر A و B به ترتیب دو تاس همزمان را پرتاب می کنند. اگر A مجموع ۶ بیاورد برنده است. همچنین اگر B مجموع ۷ بیاورد برنده خواهد شد. اگر A شروع کننده بازی باشد احتمال برنده شدن A چقدر است؟

حل:

$$P(E6) = \frac{5}{36}$$

E6: پیشامد آنکه مجموع دو تاس برابر ۶ باشد

$$P(E7) = \frac{6}{36}$$

E7: پیشامد آنکه مجموع دو تاس برابر ۷ باشد

نکته: با توجه به اینکه به صورت جداگانه تاس ها پرتاب می شود از نکته صفحه قبل نمی توان استفاده نمود.

CA: پیشامد پیروزی A

$$P(FA) = \frac{5}{36}$$

FA: پیشامد پیروزی A در پرتاب اول

$$P(FB) = \frac{31}{36} * \frac{6}{36} = \frac{31}{216}$$

FB: پیشامد پیروزی B در پرتاب اول

$$P(FN) = \frac{31}{36} * \frac{30}{36} = \frac{155}{216}$$

FN: پیشامد عدم پیروزی هر دو در پرتاب اول

ادامه مثال

- با مشروط کردن روی پرتاب اول داریم:

$$P(CA) = P(CA | FA)P(FA) + P(CA | FB)P(FB) + P(CA | FN)P(FN) =$$

ادامه مثال

- با مشروط کردن روی پرتاب اول داریم:

$$P(CA) = P(CA | FA)P(FA) + P(CA | FB)P(FB) + P(CA | FN)P(FN) =$$

$$\underbrace{P(CA | FA)P(FA)}_{1 * \frac{5}{36}} + \underbrace{P(CA | FB)P(FB)}_{0 * \frac{31}{216}} + \underbrace{P(CA | FN)P(FN)}_{P(CA) * \frac{155}{216}} =$$

$$\frac{5}{36} + P(CA) * \frac{155}{216}$$

$$\Rightarrow P(CA) = \frac{\frac{5}{36}}{1 - \frac{155}{216}} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{61}{216}} = \frac{30}{61}$$

مثال

فرض کنید در یک بازی دو نفر A و B به ترتیب دو تاس همزمان را پرتاب می کنند. اگر A مجموع ۶ بیاورد برنده است. همچنین اگر B مجموع ۷ بیاورد برنده خواهد شد. اگر B شروع کننده بازی باشد احتمال برنده شدن A چقدر است؟

مثال

فرض کنید در یک بازی دو نفر A و B به ترتیب دو تاس همزمان را پرتاب می کنند. اگر A مجموع ۶ بیاورد برنده است. همچنین اگر B مجموع ۷ بیاورد برنده خواهد شد. اگر B شروع کننده بازی باشد احتمال برنده شدن A چقدر است؟
حل:

$$P(E6) = \frac{5}{36}$$

$$P(E7) = \frac{6}{36}$$

E6: پیشامد آنکه مجموع دو تاس برابر ۶ باشد

E7: پیشامد آنکه مجموع دو تاس برابر ۷ باشد

CA: پیشامد پیروزی A

FA: پیشامد پیروزی A در پرتاب اول

FB: پیشامد پیروزی B در پرتاب اول

FN: پیشامد عدم پیروزی هر دو در پرتاب اول

$$P(FA) = \frac{30}{36} * \frac{5}{36} = \frac{25}{216}$$

$$P(FB) = \frac{6}{36}$$

$$P(FN) = \frac{30}{36} * \frac{31}{36} = \frac{155}{216}$$

ادامه مثال

- با مشروط کردن روی پرتاب اول داریم:

$$P(CA) = P(CA | FA)P(FA) + P(CA | FB)P(FB) + P(CA | FN)P(FN) =$$

$$\underbrace{P(CA | FA)P(FA)}_{1 * \frac{25}{216}} + \underbrace{P(CA | FB)P(FB)}_{0 * \frac{6}{36}} + \underbrace{P(CA | FN)P(FN)}_{P(CA) * \frac{155}{216}} =$$

$$\frac{25}{216} + P(CA) * \frac{155}{216}$$

$$\Rightarrow P(CA) = \frac{\frac{25}{216}}{1 - \frac{155}{216}} = \frac{\frac{25}{36}}{\frac{61}{216}} = \frac{25}{61}$$

ویژگی های احتمال شرطی

• احتمال شرطی تمام ویژگی های احتمال را دارد از جمله:

$$1) 0 \leq P(A | B) \leq 1$$

$$2) P(S | B) = 1$$

$$3) A_1, A_2, \dots, A_n \text{ ناسازگار}$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \mid B\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i \mid B)$$

ویژگی های احتمال شرطی

- احتمال شرطی تمام ویژگی های احتمال را دارد از جمله:

$$1) 0 \leq P(A | B) \leq 1$$

$$2) P(S | B) = 1$$

$$3) A_1, A_2, \dots, A_n \text{ ناسازگار} \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i | B\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i | B)$$

- همچنین اگر A_1 و A_2 دو پیشامد مستقل به شرط B باشند در این صورت

$$P(A_1 \cap A_2 | B) = P(A_1 | B)P(A_2 | B)$$

مثال

- یک شرکت بیمه افراد جامعه را به دو دسته مستعد تصادف و غیر مستعد تصادف تقسیم نموده است. آمار این شرکت نشان می دهد هر فرد مستعد با احتمال ۰.۴ در سال تصادف می کند در حالی که برای فرد غیر مستعد این مقدار برابر ۰.۲ است. اگر 30% افراد جامعه مستعد تصادف باشند احتمال آنکه یک فرد بیمه شده در دو سال متوالی تصادف کند چقدر است؟

مثال

- یک شرکت بیمه افراد جامعه را به دو دسته مستعد تصادف و غیر مستعد تصادف تقسیم نموده است. آمار این شرکت نشان می دهد هر فرد مستعد با احتمال ۰.۴ در سال تصادف می کند در حالی که برای فرد غیر مستعد این مقدار برابر ۰.۲ است. اگر 30% افراد جامعه مستعد تصادف باشند احتمال آنکه یک فرد بیمه شده در دو سال متوالی تصادف کند چقدر است؟

• حل:

• A1: پیشامد تصادف برای فرد بیمه شده در سال اول

• A2: پیشامد تصادف برای فرد بیمه شده در سال اول

• B: مستعد تصادف

• B^c: غیر مستعد تصادف

مثال

- یک شرکت بیمه افراد جامعه را به دو دسته مستعد تصادف و غیر مستعد تصادف تقسیم نموده است. آمار این شرکت نشان می دهد هر فرد مستعد با احتمال ۰.۴ در سال تصادف می کند در حالی که برای فرد غیر مستعد این مقدار برابر ۰.۲ است. اگر 30% افراد جامعه مستعد تصادف باشند احتمال آنکه یک فرد بیمه شده در دو سال متوالی تصادف کند چقدر است؟

• حل:

• A1: پیشامد تصادف برای فرد بیمه شده در سال اول

• A2: پیشامد تصادف برای فرد بیمه شده در سال اول

• B: مستعد تصادف

• B^c: غیر مستعد تصادف

$$P(A1 \cap A2) = P(A1 \cap A2 | B)P(B) + P(A1 \cap A2 | B^c)P(B^c)$$

استقلال

$$= P(A1 | B)P(A2 | B)P(B) + P(A1 | B^c)P(A2 | B^c)P(B^c)$$

$$= 0.4 * 0.4 * 0.3 + 0.2 * 0.2 * 0.7 =$$

$$0.048 + 0.028 = 0.076$$

مثال

- یک شرکت بیمه افراد جامعه را به دو دسته مستعد تصادف و غیر مستعد تصادف تقسیم نموده است. آمار این شرکت نشان می دهد هر فرد مستعد با احتمال 0.4 در سال تصادف می کند در حالی که برای فرد غیر مستعد این مقدار برابر 0.2 است. اگر 30% افراد جامعه مستعد تصادف باشند احتمال آنکه یک فرد بیمه شده سال دوم تصادف کند به شرط آنکه در سال اول تصادف کرده باشد چقدر است؟

مثال

- یک شرکت بیمه افراد جامعه را به دو دسته مستعد تصادف و غیر مستعد تصادف تقسیم نموده است. آمار این شرکت نشان می دهد هر فرد مستعد با احتمال ۰.۴ در سال تصادف می کند در حالی که برای فرد غیر مستعد این مقدار برابر ۰.۲ است. اگر 30% افراد جامعه مستعد تصادف باشند احتمال آنکه یک فرد بیمه شده سال دوم تصادف کند به شرط آنکه در سال اول تصادف کرده باشد چقدر است؟

• حل:

• A1: پیشامد تصادف برای فرد بیمه شده در سال اول

• A2: پیشامد تصادف برای فرد بیمه شده در سال اول

• B: مستعد تصادف

• B^c: غیر مستعد تصادف

$$P(A2 | A1) = \frac{P(A1 \cap A2)}{P(A1)} = \frac{0.076}{0.26} = \frac{76}{260} = \frac{19}{65}$$

سپاس

